2015年解析学IV追試解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は1番から順に，15, 20, 15, 15, 15, 20点で，50点以上の場合に解析学IVも解析学特別演習Iも合格 (可) になります．受験者20人中9人が合格となりました．最高点は85点でした．不可の人には追々試を行いますので掲示に注意してください．

解答解説は以下の通りです．

[1] 例はたくさんありますが，例えば次のものが簡単でしょう．

$f_k(x) = \dfrac{\chi_{[k,k+1]}(x)}{x}$ とおきます．(1), (2), (3) はすぐわかります．(4) はそのような $g(x)$ があったとすると，$[1,\infty)$ 上で，$g(x) \geq \dfrac{1}{x}$ となるので可積分ではなくなります．

(4) の根拠をきちんと示していないものは0点です．

[2] $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ とおきます．$|f(t)e^{itz}| = |f(t)|e^{-ty}$ で y が固定されているとき e^{-ty} は $[0,1]$ 上で有界なので，$f(t)$ の可積分性より $f(t)e^{itz}$ は可積分となります．

y を固定して x を動かします．$\dfrac{\partial(f(t)e^{itz})}{\partial x} = itf(t)e^{itz}$ であり，この絶対値は $|tf(t)|e^{-ty}$ でおさえられます．te^{-ty} は $[0,1]$ 上で有界なので，$f(t)$ の可積分性より積分記号下での微分が可能であり，

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = \int_0^1 itf(t)e^{itz}\,dt$$

となります．

今度は x を固定して y を (a,b) の範囲で動かします．$\dfrac{\partial(f(t)e^{itz})}{\partial y} = -tf(t)e^{itz}$ であり，この絶対値は $|tf(t)|e^{-ty}$ でおさえられます．y の動く範囲が (a,b) に限定されているので $|te^{-ty}|$ は $[0,1]$ 上で定数で抑えられ，$f(t)$ の可積分性より積分記号下での微分が可能であり，

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = -\int_0^1 tf(t)e^{itz}\,dt$$

となります．これによって，$F(z)$ は Cauchy-Riemann 方程式を満たすことがわかります．

次に，y を (a,b) の範囲に限定して，x, y を動かすと，$|te^{-ty}|$ は $[0,1]$ 上で定数で抑えられるので，$\dfrac{\partial F(z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F(z)}{\partial y}$ の両方について，極限を取るときに Lebesgue の収束定理が使え，これらの関数はともに連続となります．これによって，$F(z)$ は C^1 級となるので上と合わせて，$F(z)$ の正則性が示されました．

積分記号下での微分ができる根拠をきちんと述べていないものは減点です．

[3] 実部と虚部に分けて考えることができるので，最初から $f(x), g(x)$ は実数値を取ると仮定できます．

$E_k = \{x \in X \mid f(x) - g(x) > 1/k\}$ とおくと，$0 = \displaystyle\int_{E_k} (f - g)\, d\mu \geq \frac{\mu(E_k)}{k}$ となるので $\mu(E_k) = 0$ です．k について和を取ることにより，$\mu(\{x \in X \mid f(x) - g(x) > 0\})$ がわかります．同様に $\mu(\{x \in X \mid f(x) - g(x) < 0\})$ もわかるので，$f(x) = g(x)$ a.e. となります．

これは簡単なことをわざわざ聞いているので，説明が不十分なものは 0 点にしてあります．

[4] 仮定より，単調増大列 $\{m_k\}_k$ で，$\mu(\{x \mid |f_{m_k}(x) - f(x)| \geq 1/k\}) < 1/2^k$ となるものが取れます．$E_k = \{x \mid |f_{m_k}(x) - f(x)| \geq 1/k\}$ とおくと，$\mu(\displaystyle\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq 2/2^n$ となります．これより，$\mu(\displaystyle\limsup_{k\to\infty} E_k) = 0$ となりますが，$x \notin \displaystyle\limsup_{k\to\infty} E_k$ であれば，ある n が存在して $k \geq n$ となるすべての k について $|f_{m_k}(x) - f(x)| < 1/k$ となります．このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) = f(x)$ となります．これが証明すべき結論です．

[5] $\displaystyle\int_X \left(\int_Y |f(x)g(y)|\, d\nu\right) d\mu$ を見ると，内側の積分が $|f(x)| \displaystyle\int_Y |g(y)|\, d\nu$ となるので全体は $\displaystyle\int_X |f(x)|\, d\mu \int_Y |g(y)|\, d\nu$ となり，これは可積分性の仮定により有限値です．よって，Fubini の定理 (の系) が使える形になっており，左辺を $\displaystyle\int_X \left(\int_Y f(x)g(y)\, d\nu\right) d\mu$ と計算することができ，右辺の値を得ます．

Fubini の定理が使えるための仮定がよくわかっていないものは 0 点です．

[6] (1)

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^{1/q}, & 0 < x < 1 \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とおけば O.K. です．

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^{1/p}, & 1 < x \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とおけば O.K. です．