2015 年解析学特別演習 I テスト (12) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は 1 問 25 点です．平均点は 65 点，最高点は 100 点 (9 人) でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] g として授業で使った h_ε を取れば $f * h_\varepsilon = h_\varepsilon$ となります．$\varepsilon \to 0+$ とすれば左辺は f に L^1 収束することが示せ，右辺は収束しないので矛盾します．(左辺の L^1 収束は，$C_0(\mathbb{R})$ が $L^1(\mathbb{R})$ で稠密なことを使えばできます．)

[2] (1) $\displaystyle\int_E h\, d\mu = \nu(E) \geq 0$ であることから従います．

(2) f を単関数で下から近似することによってできます．

[3] E_k を $\mu(E_k) = 0$, $\mu_k(E_k^c) = 0$ であるように取ります．$E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^\infty E_k$ とおけば，$\mu(E) = 0$ であって，$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \mu_k(E^c) = 0$ なので結論が出ます．

[4] (1) f として χ_E を取れば，$\mu(E) = 0$ のとき，任意の k について $\mu(E_k) = 0$ となることがわかります．

(2) f として χ_E を取れば，$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \int_E h_k\, d\mu = \mu(E)$ がわかります．[2] (1) より各 h_k は 0 以上の値を取るので単調収束定理により，上式の左辺は $\displaystyle\int_E \sum_{k=1}^\infty h_k\, d\mu$ となります．任意の E についてこれが $\displaystyle\int_E d\mu$ に等しいことから結論が出ます．