

2000 年 9 月 15 日

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

答案に赤字で書いてあるのが、期末試験の点数と解析学 IV の最終成績、青字で書いてあるのが演習の小テストの「悪い方から 2 回分を除いた平均点」と演習の最終成績です。A ~ D の成績が丸で囲ってある場合は、下記の規則によってプラスアルファされた成績であることを示します。

期末試験の配点は、[1] から順に 30, 30, 20, 25, 25 の 130 点満点です。最高点は 125 点 (1 人) で得点分布は次のとおりでした。

0-19 (点)	20-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-
10(人)	14	3	10	5	3	5	1	4

平均点は 46.7 点でした。成績との対応は、50 点未満が D、50 点 ~ 59 点が C、60 ~ 79 点が B、80 点以上が A です。ただし、人によっては演習の小テストの成績が特に良かったのでプラスアルファがついています。この結果、A, B, C, D の人数はそれぞれ、12, 7, 11, 25 人となりました。また演習の成績は計算間違いを修正し、15 回目も考慮に入れた成績が書いてあります。成績との対応は前に言ったとおり、19 点未満が D、20 点 ~ 39 点が C、40 ~ 59 点が B、60 点以上が A です。また演習で一度も小テストを受けていない人には「未受験」の「未」が書いてあります。こちらも人によっては期末テストの成績が特に良かったのでプラスアルファがついていて、また 14 回終了時点での「最終成績がこれより悪くなることはない」という規則が適用されている人もいます。これらの結果、A, B, C, D の人数はそれぞれ、10, 10, 19, 23 人となりました。

演習の青い平均点の分布は次のとおりで、最高点は 79 点でした。

0-9 (点)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
16(人)	10	11	8	7	1	5	4

以下各問題について簡単に解説します。

[1] たとえば、 $(0, 0)$ ,  $(1/2^n, n)$ ,  $(1/2^{n-1}, 0)$ ,  $(1, 0)$  を折れ線をつないだようなグラフを持つ関数を  $f_n(x)$  とすればできます。

[2] (1) 積分記号下での微分によって、 $F'(t) = \frac{-1}{t^2 + 1}$  となりますが、積分記号下での微分ができる条件をチェックしないとはいけません。それには積分の中身を  $t$  で偏

2  
微分したものが「 $t$ によらない」可積分関数で抑えられていることを示す必要があります．そのためには  $t \in (0, \infty)$  としてはできなくて、 $t$  の動く範囲を  $(t_0, \infty)$  (ただし  $t_0$  は任意に固定した正の数) などのように限定しないとはいけません．

(2) (1) よりまず、 $F(t) = c - \arctan t$  であり、 $t \rightarrow \infty$  として  $c = \pi/2$  を得ます． $t \rightarrow \infty$  のときの積分値の極限の計算にはたとえば Lebesgue の収束定理が使えます． $t = 0$  のときの考察から  $c$  を決めていた人もたくさんいましたが、 $t = 0$  のときの  $F(t)$  の式は可積分でないのでこれには問題があります．

[3]  $\sqrt{f(x)}$ ,  $\sqrt{g(x)}$  に対して Cauchy-Schwarz の不等式を使うんですが、これらが  $L^2(X)$  に入るとは仮定してないので、そうならない場合を別に考える必要があります．このとき左辺は無限大なので確かに大丈夫です．(左辺が  $\infty \times 0 = 0$  の形にならないことに注意する必要があります．)

[4] これは小テスト No. 5 [3] の解答に似た方針がありました、今  $\mathbb{R}$  の測度が無限大なのでさらに注意が必要です．

各  $n$  について、

$$\mu(\{x \in [-n, n]; |f_n(x)| > c_n\}) < \frac{1}{2^n}$$

となるような正の実数  $c_n$  を取ります．ここで  $[-n, n]$  の測度が有限であることを使っています．あとは、 $a_n = 1/(c_n 2^n)$  とすれば小テスト No. 5 [3] の解答と同様にしてできます．

$f_n(x)$  の上限を (どこかの开区間で) 取るというような方針は、無限大になることを防げないのでダメです．また問題では、 $f_n(x)$  は「実数値」と言っているので  $\pm\infty$  は値にとりません．

[5] 小テスト No. 14 [3] に両方向の包含関係の問題が出ているのでその (1), (2) を合わせた「 $\inf\{\mu(E) \mid E \subset X, \mu(E) > 0\} > 0$  かつ  $\mu(X) < \infty$ 」というので論理的に正しい答えなんですが、これをさらに整理してもっと簡単な形で答えて欲しいと思っていました．しかし、上の形以上に簡単にしている人はいませんでした．この形をさらに整理すると次の答えになります．

まず、 $E \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(E) > 0$  について、 $F \subset E$ ,  $F \in \mathcal{B}$  ならば常に  $\mu(F) = 0$  または  $\mu(E \setminus F) = 0$  となるとき  $E$  は atom であると言います．すると上の条件は「 $X$  が有限個の atom の disjoint union であること」と言い換えられます．これがいちばん簡単な答えです．