解析学 IV 小テスト No. 15

2000 年 7 月 18 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．自分のノートを参照してかまいませんが，本は見ないでください．

[1] $a=\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を考え，$1\le p<\infty$ のとき，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_n|^p<\infty$ であるような (両側にのびた) 複素数列全体の集合を $\ell^p(\mathbf{Z})$ と書く．$a=\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}\in\ell^p(\mathbf{Z})$ に対し，$\|a\|_p=\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_n|^p\right)^{1/p}$ とおく．

$a=\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}\in\ell^1(\mathbf{Z})$, $b=\{b_n\}_{n\in\mathbf{Z}}\in\ell^p(\mathbf{Z})$ に対し，$c_n=\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_{n-k}b_k$ とおくとこの無限級数はすべての $n\in\mathbf{Z}$ に対し絶対収束し，これによって得られる $c=\{c_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は $\ell^p(\mathbf{Z})$ の元となることを示せ．

[2] (1) $f(x)\in L^1(\mathbf{R}), g(x)\in L^\infty(\mathbf{R})$ のとき，$f*g$ は連続関数であることを示せ．
(2) $f(x),g(x)\in L^1(\mathbf{R})$ 上で $f*g$ は連続でないようなものの例を挙げよ．

[3] 次の条件を満たすような $f(x)\in L^1(\mathbf{R})$ は存在するか．

$$\text{すべての } g(x)\in L^1(\mathbf{R}) \text{ について } f*g=g \quad \text{a.e. がなりたつ}$$

存在するならばそのような $f(x)$ を一つ求め，存在しないならば存在しないことを証明せよ．