

2000年7月18日

河東泰之(かわひがしやすゆき)

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 40, 30, 30 点で, 平均は 34.5 点, 最高は 85 点 (1 人) でした. 以下, 簡単な解説をつけます.

[1] これは Hölder の不等式で等号が成り立つ場合が起こることを確認するだけです. 答えは  $\|f\|_p$  です.

[2]  $\varepsilon > 0$  が与えられたとき,  $n > 0$  を十分大きく取れば  $f_n(x) = f(x)\chi_{\{|x|-n \leq x \leq n\}}$ ,  $g_n(x) = g(x)\chi_{\{|x|-n \leq x \leq n\}}$  とおいて  $\|f - f_n\|_2 < \varepsilon$ ,  $\|g - g_n\|_2 < \varepsilon$  が成り立ちます.  $f, g$  の代わりに  $f_n, g_n$  を使ったとき問題の極限は明らかに 0 なので, 求める極限も 0 であることがわかります.

$x$  を固定して  $t \rightarrow \infty$  としたとき,  $g(x+t) \rightarrow 0$  というのは誤りです.  $L^2$  というだけではそんなことは一般に成立しません.

[3] (1)  $\inf\{\mu(E) \mid E \subset X, \mu(E) > 0\} > 0$  であることが答えです.

まずこの条件が成り立っているとしましょう.  $E \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(E) > 0$  について,  $F \subset E$ ,  $F \in \mathcal{B}$  ならば常に  $\mu(F) = 0$  または  $\mu(E \setminus F) = 0$  となると  $E$  は atom であると言います. 上の条件より, 任意に  $E \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(E) > 0$  を取ったとき  $E$  内に atom が存在することが示せます. このことと Zorn の lemma と  $\sigma$ -finite の仮定より,  $X = \sum_n X_n$  (disjoint union) で各  $X_n$  が atom になるような表示が存在します. ( $n$  は高々可算個.) しかも仮定より,  $c = \inf \mu(X_n) > 0$  です.  $X$  上の可測関数は  $\sum_n c_n \chi_{X_n}$  の形と違っていいので,  $L^1$  ならば  $L^2$  であることがわかります.

次にこの条件が成り立っていないとしましょう.  $E_n \subset X$  で  $0 < \mu(E_n) < n^{-3}$  となるものが取れます. 少し議論すれば, 各  $E_n$  は disjoint と仮定できます. このとき  $f(x) = \sum_n \frac{\chi_{E_n}(x)}{\mu(E_n)^{1/2}}$  とおけば  $L^1$  だが  $L^2$  でない関数の例になっています.

(2)  $\mu(X) < \infty$  であることが答えです. これが十分なことは Cauchy-Schwarz の不等式からすぐに出ます. 逆に  $\mu(X) = \infty$  であったとしましょう.  $\sigma$ -finite の仮定から  $X = \bigcup_n X_n$  (disjoint union) で  $\mu(X_n) < \infty$  であるように取れます. いくつかの  $X_n$  をまとめて新たに番号を振りなおすことにより,  $\mu(X_n) > n^2$  と仮定できます. このとき  $f(x) = \sum_n \frac{\chi_{X_n}(x)}{\mu(X_n)}$  とおけば  $L^2$  だが  $L^1$  でない関数の例になっています.

(1) は全滅でした.

(裏に続く)

それから演習の成績は「悪い方から 2 回分を除いた平均点」をもとにつけるといいましたが、私は明日からイギリス出張なので今日やる分を除いた 14 回分について、「悪い方から 2 回分を除いた平均点」を計算したものを青い数字で書いておきました。これに基づく仮の成績も青字で横に書いてあります。最終成績がこれより悪くなることはありません。最終成績は、今日の 15 回目も加えて計算しなおして点がよくなる人にはその分をプラスし、さらに期末試験の成績がその仮の成績より特に良ければプラスアルファがつきます。それ以外の場合は今の青い英字が演習の最終成績になります。この青い平均点の分布は次のとおりです。最高点は 88 点でした。

0-9 (点)	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
17(人)	9	9	8	6	4	2	5	2

成績との対応は、60 点以上が A(9 人)、40~59 点が B(10 人)、20~39 点が C(17 人)、19 点以下が D(26 人) です。(かなり難し目の問題も出しているの、低い点まで通してあります。)

それでは 9 月の試験でがんばってください。