解析学 IV 小テスト No. 6 略解・解説

2000 年 5 月 30 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

今回の配点は [1] から順に 30, 30, 20, 20 点で，平均は 21.1 点，最高は 65 点 (1 人) でした．採点は Teaching Assistant の勝良君です．簡単な解説をつけます．

[1] $x \geq 1$ では $4/x^2$, $x \leq 1$ では $x^{-1/2}$ というのが可積分関数で，これが問題の関数列を上から抑えているので Lebesgue の収束定理が使えて，答えは $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ です．

これは比較的簡単な問題のつもりだったんですが，ちゃんとできていたのは 1 人だけでした．$x \geq 1$ での上からの評価を誤って e^{-x} などで抑えようとしている人がたくさんいました．$x \geq 1$ で関数列が単調増大というのも何人かいましたが誤りです．

[2] (1) まず，考えている完全加法族は $\mathbf{N}$ 上のすべての部分集合の集合で，測度は 1 点の測度が 1 であるように入れています．このとき複素数値可測関数とは単なる複素数列のことで，これが可積分とは和が絶対収束するということです．この対応がわかっていない人がとてもたくさんいました．このとき，Lebesgue の収束定理に対応するステートメントは次のようになります．

収束する無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty b_n$ で $b_n \geq 0$ となるものと，$k = 1, 2, 3, \dots$ に対し数列 $\{a_n^k\}_{n=1,2,3,\dots}$ があって，各 n ごとにすべての k について $|a_n^k| \leq b_n$ が成り立っているとする．また各 n ごとに，$k \to \infty$ のとき数列 $\{a_n^k\}_k$ は a_n に収束するとする．このとき

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^\infty a_n^k = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

が成り立つ．

(2) まず，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n^k$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ はいずれも絶対収束することに注意します．$\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとき，$\displaystyle\sum_{n=N+1}^\infty b_n < \varepsilon$ となる N を選びます．次に $k > K$ ならば $n = 1, 2, \dots, N$ について，$|a_n^k - a_n| < \varepsilon/N$ となるように K を選びます．すると，$k > K$ のとき，

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=1}^\infty a_n^k - \sum_{n=1}^\infty a_n| \\
\leq &\sum_{n=1}^N |a_n^k - a_n| + \sum_{n=N+1}^\infty |a_n^k| + \sum_{n=N+1}^\infty |a_n| \\
< &\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}$$

となるので，証明が終わります．

[3] 自然数 n に対し，$E_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\}$, $f_n(x) = f(x)\chi_{E_n}(x)$ とおくと各 $f_n(x)$ は有界関数で，単調収束定理より

$$\int_X |f(x) - f_n(x)|^2 \, d\mu = \int_X |f(x)|^2 \, d\mu - \int_X |f_n(x)|^2 \, d\mu \to 0$$

となります．だから十分大きい n について $g(x) = f_n(x)$ とおけばだいじょうぶです．

$f(x) \geq 0$ の場合に帰着した後，単関数で下から近似して Lebesgue の収束定理を使っても同様にできます．

実際は 1 番目の不等式は 2 番目の不等式と問題の仮定から導かれますが，まだ授業でやってないので別に書いてあります．

[4] まず，$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots \to 0$ となる数列で，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |f(x-a_n) - f(x)| \, dx < 1/2^n$ となるものを選びます．(授業でやったことよりこのような数列は選べます．) これに対して $g_n(x) = \max(f(x), f(x-a_1), \ldots, f(x-a_n))$ とおくと，これは単調増大関数列です．

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ のとき}, \\ 0, & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

と書くことにすると，

$$0 \leq g_1(x) - f(x) = (f(x-a_1) - f(x))_+ \leq |f(x-a_1) - f(x)|$$

だから，

$$\int_{\mathbf{R}} (g_1(x) - f(x)) \, dx \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x-a_1) - f(x)| \, dx < 1/2$$

となります．さらに，$g_2(x) = \max(g_1(x), f(x-a_2))$ より

$$g_2(x) - g_1(x) = (f(x-a_2) - g_1(x))_+ \leq (f(x-a_2) - f(x))_+ \leq |f(x-a_2) - f(x)|$$

だから，

$$\int_{\mathbf{R}} (g_2(x) - g_1(x)) \, dx \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x-a_2) - f(x)| \, dx < 1/2^2$$

となります．以下同様で，$g(x) = \sup_n g_n(x)$ とおくとすべての n について $g(x) \geq f(x-a_n)$ であって，また $g_n(x)$ は単調増大だから単調収束定理より，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} g(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x) \, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} (f(x) + (g_1(x) - f(x)) + \cdots + (g_n(x) - g_{n-1}(x))) \, dx \\
&< \int_{\mathbf{R}} f(x) \, dx + 1
\end{aligned}$$

となって $g(x)$ は可積分です．

この問題は一人もできてませんでした．