解析学 IV 小テスト No. 4

1997 年 5 月 12 日
河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

自分のノートを参照してよい．(ただし，本は見ないこと．)

[1] $\mathbf{R}^2$において，つぎのおのおのの集合が Lebesgue 可測であることを示せ．
(1) $A = \{(x, 0) \mid 0 \le x < 1\}$
(2) $A = \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$
(3) $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$
(4) $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}\}$

[2] 4/21 の講義のように，実数の集合 $\mathbf{R}$ の部分集合で，$A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$, (disjoint union) の形のもの全体のなす有限加法族を $\mathcal{F}$とする．$\mathbf{R}$ 上の単調増加関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \text{ のとき}, \\ 0, & x < 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

と定め，この fを使って，4/21 の講義のように $\mathcal{F}$上の有限加法的測度 m を定める．さらにこの m から 4/21 の授業のようにして外測度Γを作る．
このときΓ-可測な集合は何か．具体的に決定せよ．

[3] $f_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を，$\mathbf{R}$ 上で定義された実数値関数で，各 n について，$0 \le f_n(x) \le 1$ a.e.x となるものとする．この時，$0 \le \varliminf_{n \to \infty} f_n(x) \le 1$ a.e.x であることを証明せよ．

[4] $f(x, y)$ を，$\{(x, y) \mid y > 0\}$ 上で定義された実数値関数で，任意の $y > 0$ について，$0 \le f(x, y) \le 1$ a.e.x となるものとする．この時，$0 \le \varliminf_{y \to 0+} f(x, y) \le 1$ a.e.x であると結論できるか．Yes ならば証明を与え，No ならば反例を与えよ．

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．