解析学 IV 小テスト No. 3

1997 年 4 月 28 日
河東泰之
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

自分のノートを参照してよい.（ただし，本は見ないこと.）

[1] $\mathbf{R}$ 上で，$A = [0, \infty)$ とし，$\mathcal{F} = \{\varnothing, A, A^c, \mathbf{R}\}$ と，$\mathbf{R}$ 上の有限加法族を定める．この上の有限加法的測度 m を，$m(\varnothing) = 0$, $m(A) = m(A^c) = 1/2$, $m(\mathbf{R}) = 1$ で定める．さらにこの m から 4/21 の授業のようにして外測度Γを作る．Γ-可測集合はどのようなものか，具体的に決定せよ.

[2] 集合 X 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ を，$\mathcal{F} = \{\varnothing, X\}$ で定め，$\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度 m を，$m(\varnothing) = 0$, $m(X) = \infty$ で定める．さらにこの m から 4/21 の授業のようにして外測度Γを作る．Γ-可測集合はどのようなものか，具体的に決定せよ.

[3] $\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 外測度をμ^*で表す．$\mathbf{R}^2$ の部分集合，$A = \{(x, 1/x) \mid x > 0\}$ に対し，$\mu^*(A)$ を求めよ.

[4] 4/21 の講義のように，実数の集合 $\mathbf{R}$ の部分集合で，$A = \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$, (disjoint union) の形のもの全体のなす有限加法族を $\mathcal{F}$ とする．$\mathbf{R}$ 上の単調増加関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ のとき}, \\ -1, & x \leq 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

と定め，この f を使って，4/21 の講義のように $\mathcal{F}$ 上の有限加法的測度 m を定める．さらにこの m から 4/21 の授業のようにして外測度Γを作る．$\mathcal{F}$ の元 A で，$m(A) \neq \Gamma(A)$ となるものの例を挙げよ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.