解析学 IV 小テスト No. 8 の簡単な解説

1997 年 6 月 16 日
河東泰之

[1] (1) いろいろなやり方がありますが，多分一番簡単なのは $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ と展開して単調収束定理を使うことでしょう．(あとは項別に部分積分する．)

(2) Lebesgue の収束定理で $\varepsilon \to 0$ としたあと置換積分すれば (1) に帰着します．

[2] (1) Fatou の lemma ですぐできます．

(2) これは簡単．

[3] 全滅に近いできだったので，これは詳しく書きます．

まず，$f = f_+ - f_-$ と分けることにより，$f(x) \geq 0$ として一般性を失わない．$f(x)$ が単関数であれば，結論が成り立つことは明らか．

一般の場合は，$f(x)$ に一様収束する単関数の列 $\{f_k(x)\}_k$ を取る．($f(x)$ が有界なので，授業で作ったような単関数の近似列は $f(x)$ に一様収束している．ここで $f(x)$ の有界性を本質的に使っている．) 一方 $\mu_n(X) \to \mu(X)$ だから，$\mu_n(X) < C$ となるような定数 C を取っておく．次に X 上で $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3C$ となるような k を選ぶ．このとき，$f_k(x)$ は単関数だからある N が取れて，$n \geq N$ の時，$|\int_X f_k(x)\,d\mu - \int_X f_k(x)\,d\mu_n| < \varepsilon/3$ となる．すると，$\int_X |f(x) - f_k(x)|\,d\mu \leq C\varepsilon/3C$, $\int_X |f(x) - f_k(x)|\,d\mu_n \leq C\varepsilon/3C$, だから，$|\int_X f(x)\,d\mu - \int_X f(x)\,d\mu_n| < \varepsilon$ となって結論が出る．

配点は [1] (1) 20, (2) 20, [2] (1) 20, (2) 10, [3] 30 点です．最高点は 90 点 (1 人)，平均点は 31.7 点でした．