

1997 年 6 月 9 日

河東泰之

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

自分のノートを参照してよい(ただし, 本は見ないこと.)

[1] (1) 次の等式を示せ.

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(2) 次の等式を示せ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon(e^x - 1)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

[2] 集合  $X$  上の完全加法族  $\mathcal{B}$  と測度  $\mu$  について考える.  $X$  上の実数値可測関数列  $\{f_n(x)\}_n$  について,  $X$  の各点で  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  であるとする. また, 定数  $C$  で, 各  $n$  について,  $\int_X |f_n(x)| d\mu \leq C$  となるものが存在するとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1)  $f(x)$  が可積分で,  $\int_X |f(x)| d\mu \leq C$  であることを示せ.

(2) 上の条件を満たしているが,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$  が成立しないような例を挙げよ.

[3] 集合  $X$  上の完全加法族  $\mathcal{B}$  と測度  $\mu, \mu_n (n = 1, 2, \dots)$  について考える.  $\mu(X), \mu_n(X) < \infty, (n = 1, 2, \dots)$  と仮定する. すべての  $A \in \mathcal{B}$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$  であれば,  $X$  上の任意の実数値有界可測関数  $f(x)$  について,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) d\mu_n = \int_X f(x) d\mu$  が成り立つことを示せ.

解答は別紙に書いて下さい. 解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.

7月7日は上海の学会に出張するため, 授業は休講にして後に補講を行います, 演習の時間の小テストはこの日にもやりますので間違えないようにしてください.