作用環について

河東泰之 (東京大学大学院数理科学研究科)

1999 年 5 月 29 日

作用素とは無限次元行列のことである．作用素環とは無限次元行列たちの集まりだ．しかしいったい無限次元行列とはどんなものだろうか．$n \times n$ 行列を考えて右と下にそれぞれ 1 列，1 行をつけたせば，$(n+1) \times (n+1)$ 行列になるのだからそうやって，どんどん付け足していって，無限に数が縦横に並んだものだ，というのが一つの答えであろう．無限に数が縦横に並んだものを 2 つ持って来て，掛け算を有限のときと同じ規則でやろうとすると無限級数が出てくるので，収束が問題になるが，とりあえず収束のことを気にしなければこれは正しい答えである．しかし，私の研究テーマである作用素環論の立場から言うと無限次元行列に対するこのような捉え方はあまりおもしろいものではない．ここでは別の見方をしてみよう．こちらの考え方は von Neumann によって考え出されたもので，最近の数学研究で大きな役割を果たしているものである．

無限次元の前に有限次元行列について反省することから始めよう．行列は 1 次変換としてベクトルにはたらいているわけだが，2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はどのようにベクトルにはたらくのが「自然」だろうか．そんなものは

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

に決まっていると思うかもしれないし，これはこれで何も間違っていないが，無限次元に移行することを考えると，これはあまりおもしろいものではない．このかわりに，$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を「ベクトル」と思ってこれに左から $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をかけるのが「はたらき」だと思ってみよう．もちろんこの掛け算は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

だが，$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ たちをベクトルと思うとこれらは 4 次元空間をなしているので，これは 2×2 行列が 4 次元空間にはたらいていることになる．この 4 次元空間の基底として自然に

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を取ると，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$という 2×2 行列のはたらきは次の 4×4 行列で表されることになる．

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

これが「自然」である理由は次の通りである．$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$も 2×2 行列だから，2×2 行列を右から掛けることもできる．右から掛ける方は記号を変えて$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$としよう．すると

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x + c'y & b'x + d'y \\ a'z + c'w & b'z + d'w \end{pmatrix}$$

だから，この右からの掛け算のはたらきを上のように 4×4 行列で書くと，

$$\begin{pmatrix} a' & b' & 0 & 0 \\ c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' & d' \end{pmatrix}$$

になる．これと最初のタイプの 4×4 行列との関係には次のような関係がある．つまり，4×4 行列 A 全体のうち，第一のタイプのもの B全体と交換する，つまり $AB = BA$ となるもの全体を考えると，それがちょうど第二のタイプの行列全体になるのである．(実際に $AB = BA$ という条件を成分で書いてみればわかる．) これによって，左右からの掛け算が対等な立場で扱えるのであり，この対称的な取り扱いが無限次元に移行した時に重要なポイントになるのである．普通に考えたように，2×2 行列が 2 次元ベクトルにはたらくと思うとこのような左右の対称性は得られない．

そこで次に無限次元への移行法を考えよう．上のやり方では 2×2 行列から出発して，その「自然」なはたらきを考えると，4×4 行列が自然に現れることを見た．これによって，2×2 行列の全体が，4×4 行列の全体に「埋め込まれて」いるのである．すると今度は，4×4 行列について「自然なはたらき」を見ると，今度も 4×4 行列達に掛け算でかかっていると思うことになり，それは 4×4 行列を 16×16 行列と思うことになる．この操作は次々繰り返すことができ，次のステップでは，16×16 行列を 256×256 行列と思うことになる．この操作を繰り返すたびに，考えている行列全体は，2×2 行列の全体，4×4 行列の全体，16×16 行列の全体，$\ldots$ と増えて行き，これを無限に繰り返した「極限」を考えることができ，それによって得られるものがもっとも基本的な作用素環の一つ，von Neumann によって発見された hyperfinite II_1 factor である．その要素がここで考えたい「無限次元行列」なのであ

る．これが自分自身に左からの掛け算ではたらくと考えると，また右からの掛け算と対等な状況になっていることがわかり，いろいろなことに役に立つ．

この作り方についてもう少し考えるため特に，対角行列についてだけ考えてみよう．それは，最初$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$という行列を考えたのを

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

という行列と見直すと言うことである．最初の 2×2 行列に対応して，$[0, 1/2)$ で a, $[1/2, 1)$ で b という値を取る関数を考える．さらに，

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

という 4×4 行列に対応して，$[0, 1/4)$ で a, $[1/4, 1/2)$ で b, $[1/2, 3/4)$ で c, $[3/4, 1)$ で d という値を取る関数を考える．すると上の 2×2 行列では，そのまま関数を対応させても，いったん 4×4 行列と思ってから関数を対応させても同じであることが明らかである．この操作を繰り返すと，次のステップでは 16×16 の対角行列に，$[0, 1/16), [1/16, 1/8), \ldots, [15/16, 1)$ で 16 個の値を取る関数を対応させることになる．これを「無限に繰り返す」と，関数の幅の刻みがどんどん細かくなっていくので，直感的には $[0, 1)$ 上の「任意の関数」がこの方法で近似されることが推測されるであろう．すなわちこの方法で作った，「無限次元対角行列」の全体は $[0, 1)$ 上の関数達と「同じ」ものである．これに対して，$n \times n$ 行列の右と下に 0 を追加する，という素朴な方法で無限次元に移行した場合について対角行列達がどうなるかを考えてみると，対角行列の対角成分を並べた数列が対応することがわかる．つまりこちらの「無限次元対角行列」の全体は数列達と「同じ」ものである．関数の積分と数列の和がよく似た性質のものであるように，今作った無限次元行列の作り方と，素朴な作り方をしたものはよく似た性質を持っている．しかし，関数の方が数列より，もっとおもしろく高級なものであるように，ここで作った無限次元行列の方が素朴な作り方をしたものよりいろいろとおもしろいものなのである．

その「おもしろい」ことの一つの現れとして実数次元について述べよう．上で作った無限次元行列達が自分自身に左からの掛け算ではたらくと考えたとき，そのはたらかれるベクトル達の次元はもちろん無限である．しかしここで考えを変えて自分自身を単位に取り，この状況での次元は 1 だと思ってみよう．基準となる無限大が一つ，という感じである．無限次元で考える前に 2×2 行列の時にこのやり方を当てはめてみると，2×2 行列達全体に左からの掛け算ではたらくときの次元を 1 とするのだから，普通に平面ベクトルにはたらいているときの平面の次元はその半分で $1/2$ と思うのである．すると，2×2 行列全体がはたらくことが可能な次元

は，$0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$ となることがわかる．同様にして，4×4 行列で考えてみると，それらがはたらくことが可能な次元は，$0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4 \ldots$ となるのである．これで極限を取ると，上のような無限次元行列達がはたらくことが可能な次元は，任意の 0 以上の実数となることが推測できるであろう．実際そうであることが証明できて，このことが現代数学でさまざまな興味深い役割を果たすのである．