数理科学 IV 中間テスト (1) 解答解説

2005 年 5 月 30 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 25 点で，平均は 51 点でした．最高点は 100 点 (2 人)，その次は 75 点 (8 人) です．これは成績に関係ないのでそのままつけてありますが，期末テスト等では，配点などで配慮してもう少し点が出るようにします．

[1] 固有値は 2 と 3，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 2t \\ -3t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3t \\ -4t \end{pmatrix}$ (t は 0 でない複素数).

[2] 固有値が違えば対角化可能である．よって固有方程式が重根を持たない条件を考えると $t \neq 7, -1$ ならば対角化可能である．$t = 7, -1$ の場合はいずれも固有値が重根でかつ単位行列のスカラー倍ではないので対角化可能ではない．

[3] A は対角化可能で，適当な可逆行列 P に対し，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．基底を取り替えることにより最初から A はこの形だとしてよい．$\mathrm{Ker}(T)$ が 5 次元，$T(V)$ が 4 次元である．

[4] 行列式因子を求める．まず明らかに $d_1 = 1$ である．d_2, d_3 はそのまま計算してもよいが，たとえば 2 行目の -3 倍，-5 倍をそれぞれ 1 行目，3 行目に加えると次の x-行列が得られる．

$$\begin{pmatrix} 0 & -x+3 & x-9 \\ x-1 & x-2 & 4 \\ 0 & -2x+5 & 3x-15 \end{pmatrix}$$

さらに適当に基本変形を続けると

$$\begin{pmatrix} 0 & -x+4 & -12 \\ x-1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & x+3 \end{pmatrix}$$

になる．これに対しては，$d_2 = x-1$, $d_3 = x(x-1)^2$ がすぐにわかる．よって，単因子は $e_1 = 1$, $e_2 = x-1$, $e_3 = x(x-1)$ である．