

1999 年 10 月 19 日

河東泰之

e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答は別紙に書いてください。学生証番号, 氏名を一番上に書いてください。

[1] $x \in \mathbf{R}$ に対し, $f(x) = e^{-|x|}$ とおく。 $f * f(x)$ を求めよ。

[2] 10/12 の授業のように, $f(x) \geq 0$, $\text{supp} f \subset \{|x| \leq 1\}$, $\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = 1$ となる $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ をとり, $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ とおく。 $1 \leq p < \infty$ とするとき, $g(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ に対して, $\delta \downarrow 0$ のとき $\|f_\delta * g - g\|_p \rightarrow 0$ を示せ。

[3] $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x) \in L^p(\mathbf{R})$, $g(x) \in L^q(\mathbf{R})$ とする。このとき以下のことを示せ。

- (1) $f * g(x)$ が各 $x \in \mathbf{R}$ で定義される。
- (2) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が成り立つ。
- (3) $f * g \in C_\infty(\mathbf{R})$ である。

この演習は私の担当と大島先生の担当と隔週ですが, 単位については 2 人で別々に成績をつけて, そのうちの良い方を正式の成績にするということになりました。