2019 年解析学特別演習 III テスト (4) 解答解説

2019 年 11 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 25 点で，平均点は 79.1 点，最高点は 100 点 (13 人) でした．

[1] e^{-x^2} は急減少関数で，この Fourier 変換は $\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$ なので，これを 2 回微分したものを -1 倍して，答えは $-\sqrt{\pi}\left(\dfrac{\xi^2}{4}-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/4}$ です．

[2] $\dfrac{1}{1+x^2}$ の Fourier 変換が $\pi e^{-|\xi|}$ なので，積分記号下の微分により，$\dfrac{-2x}{1+x^2}$ の Fourier 変換が $\pi i\xi e^{-|\xi|}$ となります．これより答えは $-\dfrac{\pi i\xi}{2}e^{-|\xi|}$ です．

[3] f, g が急減少関数のときは，$\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}$ の証明と同様にして，$\dfrac{1}{(2\pi)^n}\hat{f}*\hat{g}$ の Fourier 逆変換が fg であることがわかります．さらにこのとき fg も急減少，とくに可積分なので $\dfrac{1}{(2\pi)^n}\hat{f}*\hat{g}$ が連続であることと合わせて，fg の Fourier 変換は $\dfrac{1}{(2\pi)^n}\hat{f}*\hat{g}$ に等しいことがわかります．

次に $f, g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ とすると，急減少関数 f_k, g_k で，$k\to\infty$ のとき $\|f_k-f\|_2\to 0$, $\|g_k-g\|_2\to 0$ となるものが取れます．このとき

$$\|fg-f_kg_k\|_1\le\|(f-f_k)g\|_1+\|f_k(g-g_k)\|_1\le\|f-f_k\|_2\|g\|_2+\|f_k\|_2\|g-g_k\|_2\to 0$$

より，f_kg_k の Fourier 変換は fg の Fourier 変換に一様収束します．また $k\to\infty$ のとき $\|\hat{f}_k-\hat{f}\|_2\to 0$, $\|\hat{g}_k-\hat{g}\|_2\to 0$ なので，

$$|\hat{f}*\hat{g}(\xi)-\hat{f}_k*\hat{g}_k(\xi)|\le|(\hat{f}-\hat{f}_k)*\hat{g}(\xi)|+|\hat{f}_k*(\hat{g}-\hat{g}_k)(\xi)|\le\|\hat{f}-\hat{f}_k\|_2\|\hat{g}\|_2+\|\hat{f}_k\|_2\|\hat{g}-\hat{g}_k\|_2\to 0$$

となります．これより結論を得ます．

[4] $\dfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換は $f(\xi)=\dfrac{\sin\xi}{\xi}$ です．($\xi=0$ ではこの値は 1 と解釈します．) [3] の結果より，$\dfrac{1}{4}\chi_{[-1,1]}(x)$ の Fourier 変換は $\dfrac{1}{2\pi}f*f(\xi)$ です．これより，$f*f(x)=\pi\dfrac{\sin x}{x}$ となります．