2019年度解析学VI期末テスト解答解説

2020年2月5日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，[1] 15点，[2] 15点，[3] 15点，[4] 15点，[5] 10点，[6] (1) 5点，(2) 5点，(3) 10点，[7] 10点です．100点満点で平均点は55.1点，最高点は95点 (1人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
0(人)	1	3	2	4	10	2	2	3	3	0	30

この得点と成績が赤字で書いてあります．成績は90点以上がA+(優上，3人), 70点以上がA(優，5人), 55点以上がB(良，6人), 35点以上がC(可，12人), それ未満がD(不可，4人) です．ただし演習の成績が特に良かった人は，これより良い成績がついています．

演習の成績 (悪い1回分を除いた平均) は，平均点は64.1点，最高点は99点 (1人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
0(人)	2	0	1	6	1	6	6	5	3	0	30

こちらの成績が青字で書いてあります．成績は90点以上がA+(3人), 80点以上がA(5人), 65点以上がB(9人), 50点以上がC(4人), それ未満がD(8人) です．ただし期末試験の成績が特に良かった人は，これより良い成績がついています．

[1] $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$, $\hat{g}(\xi) = \pi\chi_{[-1,1]}(\xi)$ なので，$\widehat{f * g}(\xi) = \pi^2\chi_{[-1,1]}(\xi)e^{-|\xi|}$ です．これを Fourier 逆変換することにより答えは

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{(ix-1)\xi}\,d\xi + \frac{\pi}{2}\int_{-1}^0 e^{(ix+1)\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{1+x^2}\left(1 + \frac{x\sin x - \cos x}{e}\right)$$

です．(なおここからわかることは，$f * g(x)$ がほとんどいたるところこれに等しいということで，これでO.K. にしましたが，実際は $f * g$ が連続であることが Lebesgue の収束定理を用いて簡単に示せるので，すべての x でこれが正しい答えです．)

[2] $\dfrac{i}{4}(\chi_{[0,\pi]}(x) - \chi_{[\pi,2\pi]}(x))$ の Fourier 係数を計算すると，問題のようになることが容易にわかるのでこれが答えです．

なお「Fourier 係数」をこれと 2π だけ違うものと解釈している人もいましたが，それでも O.K. にしてあります．

[3] 問題の書き方があいまいでしたが，問題の意味は「$f(x)$ は $(0,2\pi)$ 上の C^∞ 級関数とほとんどいたるところ一致する」という意味です．

Fourier 逆変換公式により，$f(x)$ は $[0,2\pi]$ 上でほとんどいたるところ $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ と一致します．この式の値をあらためて $f(x)$ とおきます．この式を $\mathbb{Z}$ 上で各点の測度が 1 という測度による積分と思うと，仮定より積分記号下での微分が何回でもできて，$f^{(k)}(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (in)^k e^{inx}$ となります．よって，f は C^∞ 級関数となります．

[4] $\chi_{[-n/2,n/2]}(x)$ の Fourier 変換が $2\dfrac{\sin\frac{n}{2}\xi}{\xi}$ であることより，$\chi_{[-n/2,n/2]}*\chi_{[-n/2,n/2]}(x)$ の Fourier 変換が $4\dfrac{\sin^2\frac{n}{2}\xi}{\xi^2} = \dfrac{2}{\xi^2}(1-\cos n\xi)$ となります．Fourier 逆変換することにより，$\hat{f}_n(\xi) = \pi\max\left(1-\dfrac{|\xi|}{n}, 0\right)$ となります．これは $n\to\infty$ のとき，$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ において π に収束するので，Fourier 逆変換により．$n\to\infty$ のとき，f_n は $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ において $\pi\delta$ に収束します．したがって，$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ においてもこれが答えです．

[5] すべての $k\geq 0$ に対し $f^{(k)}(0)=0$ となっていれば，「$T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} T=\{0\}$ ならば $fT=0$」が成立します．よって $f(x)=\exp(-1/x^2)$ (ただし $f(0)=0$) とすれば問題の条件を満たします．

[6] (1), (2) 部分積分により，定義式の右辺の極限を取る前の式は

$$\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)-2\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

に等しくなっています．ここで $\varepsilon\to 0+$ とすると，第 1 項は $\varphi'(0)-\varphi'(0)=0$ に収束し，第 2, 3 項の和は $\langle \mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}, \varphi'\rangle = \langle -\left(\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}\right)', \varphi\rangle$ に収束します．このことから $T = -\left(\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}\right)'$ がわかります．$\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ は緩増加超関数だったので，T も緩増加超関数です．

(3) $\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x}$ の Fourier 変換が $-\pi i \operatorname{sgn}(\xi)$ だったことより，答えは $-\pi|\xi|$ です．

[7] $f*g$ の Fourier 変換は $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ なので，これに $(1+\xi^2)^{(m+s)/2}$ をかけたものは $(1+\xi^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)(1+\xi^2)^{s/2}\hat{g}(\xi)$ となります．ここで $f\in W^{m,1}(\mathbb{R})$ より，$\hat{f}(\xi), \xi^m\hat{f}(\xi)$ は共に，可積分関数の Fourier 変換として有界なので，$(1+\xi^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)$ も有界です．また $g\in H^s(\mathbb{R})$ より $(1+\xi^2)^{s/2}\hat{g}(\xi)$ は L^2 関数なので，合わせて $(1+\xi^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)(1+\xi^2)^{s/2}\hat{g}(\xi)$ は L^2 関数です．これより結論を得ます．