2018 年解析学特別演習 III テスト (4) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各 25 点，平均点は 61 点，最高点は 85 点 (3 名) でした．

[1] $f*f$ の Fourier 変換は $(\hat{f}(\xi))^2 = \pi e^{-\xi^2/2}$ なので，これに Fourier 逆変換を施して $(f*f)(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2}$ です．($f*f$ が連続であることは容易に分かるので，これは単に a.e. ではなく，すべての x で成り立つ等式です．)
直接計算してもそれほどの手間ではありません．

[2] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\,dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$ の両辺を ξ で微分すると，授業でやったように積分記号下での微分ができるので，答えは $\dfrac{-\sqrt{\pi} i\xi}{2} e^{-\xi^2/4}$ です．
あるいは左辺を部分積分しても授業でやったようにできます．

[3] Plancherel の定理によって，求める積分の値は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\chi_{[-1,1]}(\xi)\frac{2}{1+\xi^2}\,d\xi = \int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{1+\xi^2} = [\arctan\xi]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

となります．

[4] $h(x) = \chi_{[-1,1]}(x)|x|^{-2/3}$, $k(x) = \chi_{[-1,1]}(x)|x|^{-1/3}$ とおきます．$h \in L^1(\mathbb{R})$, $k \in L^2(\mathbb{R})$ です．($x = 0$ での値はどうでもいいのですが，たとえば 0 としてかまいません．) 有理数全体に番号をつけて $p_1, p_2, p_3, \ldots$ とします．$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(x - p_n)$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(x - p_n)$ とおきます．ノルムを見ると，これらはそれぞれ，$L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ の中で収束していることがわかります．$x = p_n$ として，一つ自然数 m を固定すると，$p_l = p_n - p_m$ となる l があるので，この l に対し，$f(p_n - y) \geq \dfrac{1}{2^l} h(y - p_m)$, $g(y) \geq \dfrac{1}{2^m} k(y - p_m)$ となるため，$f(p_n - y)g(y) \geq \dfrac{1}{2^{(l+m)}} \chi_{[-1,1]}(y - p_m)|y - p_m|^{-1}$ となります．この右辺は y の可積分関数ではないので，$f(p_n - y)g(y)$ も y の可積分関数ではありません．