2018年解析学特別演習 III テスト (3)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

自筆ノート持ち込み可で行います．本，コピー等は不可です．計算用紙はありません．自分のノート等を使ってください．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は1枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] 次のそれぞれの命題は正しいか．正しければ証明し，誤っていれば反例を挙げよ．きちんと理由も示すこと．

(1) $(0,1)$ 区間の開かつ稠密な集合は Lebesgue 測度 1 を持つ．

(2) $(0,1)$ 区間上の Lebesgue 可測可積分関数 $f(x)$ が，すべての $x \in (0,1)$ に対して $f(x) \geq 0$ を満たし，また，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ を満たせば，ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ である．

(3) $(0,1)$ 区間の Lebesgue 可測集合が連続濃度を持てば，その Lebesgue 測度は正である．

(4) $\mathbf{R}$ 上の実数値可測関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_{-N}^{N} f(x)\, dx$ が $N \to \infty$ で極限を持てば，$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上可積分である．

[2] $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合 A について次の性質が成り立つための必要十分条件を求めよ．

A 上の任意の複素数値 Lebesgue 可測関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_A |f(x)|^2\, dx < \infty$ ならば $\displaystyle\int_A |f(x)|\, dx < \infty$ である．

[3] 測度空間 (X, μ) 上の複素数値可積分関数 $f(x), g(x)$ を取る．X の任意の可測部分集合 E について $\displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$ であれば，ほとんどいたるところ $f(x) = g(x)$ であることを示せ．