解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (7)

2012 年 1 月 23 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 25 点です．最高点は 75 点 (3 人)，平均点は 44.7 点でした．
略解をつけます，これはかなり省略してあるので，できなかった人はよく考えて復習してください．

[1] めんどうですが真面目に計算するだけです．答えは

$$\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n\in\mathbf{Z},n\neq 0}\frac{3}{n^2\pi}\left((-1)^n\pi^2-2\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)e^{inx}$$

です．

[2] これもめんどうですが，計算するだけです．答えは $\dfrac{\pi i}{2}e^{-ix/2}$ です．

[3] 条件より $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_ne^{inx}$ は一様絶対収束します．項別微分可能であることも従うので，これが C^∞ 級関数を与えます．これが f とほとんどいたるところ一致します．

[4] まず Poisson の和公式が使えることを確認します．すると与式は

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{f}_k(n)$$

となります．一方

$$\hat{f}_k(\xi)=(\hat{f}(\xi))^k=\pi^ke^{-k|\xi|}$$

なので，答えは

$$\frac{\pi^{k-1}}{2}\frac{e^k+1}{e^k-1}$$

となります．