解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (4)

2011 年 11 月 14 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は $30, 30, 40$ 点です．最高点は 100 点 (1 人)，平均点は 49.0 点でした．略解をつけます，これはかなり省略してあるので，できなかった人はよく考えて復習してください．

[1] (1) Fourier 変換すればすぐできます．
(2) Fourier 変換すれば $\hat{f}\hat{g} = \hat{g}$ ですが，どの点でも $g(\xi) \neq 0$ であるような g があるので，$\hat{f}(\xi) = 1$ となりますが，Riemann-Lebesgue の定理よりこれは不可能です．

[2] 直接やってもできますが，Fourier 変換すれば，急減少関数の積が急減少，ということなので定義から直接示せます．

[3] 条件式を Fourier 変換して，$(\hat{f}(\xi))^n = \hat{f}(n\xi)$ となります．条件より，$\hat{f}$ は実数値偶関数となるので，$n = 2$ のときより，常に $\hat{f}(\xi) \geq 0$ となります．正の整数 m, n に対して $\hat{f}(\pm m/n) = (\hat{f}(1))^{m/n}$ となり，$\hat{f}$ の連続性より $\xi > 0$ に対して $\hat{f}(\pm\xi) = (\hat{f}(1))^{\xi}$ となります．$\hat{f}(1) = 0$ ならば $\hat{f}$ は定数関数 0 であり，これは条件を満たします．それ以外の場合は，$\hat{f}(0) = 1$ なので，これと合わせて計算すると $f(x) = \dfrac{c}{\pi(x^2 + c^2)}$, $c > 0$ が答えです．