解析学特別演習 II・小テスト (1)

2011 年 10 月 17 日 10:00–12:15
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．裏面を使用してもかまいませんが，その場合は表面の最後に「裏面使用」と書いてください．

自分のノートの持ち込み可です．

以下，$\mathbf{R}$ 上で考えている測度はすべて Lebesgue 測度である．

[1] 次のそれぞれの条件を満たす関数があるか．ある場合は具体例を一つ挙げ，ない場合はない理由を示せ．前者の場合も，その例が条件を満たしていることをきちんと説明すること．

(1) $L^1(\mathbf{R})$ の元だが $L^2(\mathbf{R})$ の元ではない．

(2) $L^2(\mathbf{R})$ の元だが $L^1(\mathbf{R})$ の元ではない．

(3) f は連続で $L^1(\mathbf{R})$ の元だが，$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ ではない．

(4) f は連続で，$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ だが，どの $p \in [1, \infty)$ についても $f \in L^p(\mathbf{R})$ ではない．

[2] 次の条件を満たす関数 f の例を一つ挙げよ．その例が条件を満たしている理由をきちんと説明すること．

$f \in L^1(\mathbf{R})$ だが，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)\,dy$ が可積分でないような $x \in \mathbf{R}$ が無限個ある．

[3] $\mathbf{R}$ 上の，コンパクト台を持つ複素数値連続関数全体の集合を $C_0(\mathbf{R})$ と書く．また．$\mathbf{R}$ 上の関数 f と実数 t に対し，$f_t(x) = f(x-t)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f \in C_0(\mathbf{R})$ のとき，$\lim_{t\to 0} \|f - f_t\|_1 = 0$ を示せ．

(2) $f \in L^1(\mathbf{R})$ のとき，$\lim_{t\to 0} \|f - f_t\|_1 = 0$ を示せ．

[4] $\mathbf{R}$ 上の複素数値連続関数 f で，$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ を満たすものの全体を $C_\infty(\mathbf{R})$ と書く．$f \in C_\infty(\mathbf{R})$ に対し，$\|f\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ とおいたとき，これによって $C_\infty(\mathbf{R})$ は Banach 空間になることを示せ．