

解析学特別演習 II・小テスト (1)

2010 年 10 月 4 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。裏面を使用してもかまいませんが、その場合は表面の最後に「裏面使用」と書いてください。

今回はノート、本など持ち込み不可です。

[1] 次の各命題のステートメントを書け。

- (1) Lebesgue の収束定理
- (2) Fatou の補題
- (3) 単調収束定理

[2] 実数列 $\{a_n\}_n$ と実数 a について次の問いに答えよ。

- (1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ の定義を書け。
- (2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ が同値であることを (1) の定義に基づいて示せ。

[3] \mathbf{R} の稠密な開集合の Lebesgue 測度の取りうる値の下限を求めよ。

[4] 測度空間 (X, \mathcal{B}, μ) と、その上の複素数値可測関数 $f(x)$ について、 $\int_X |f(x)| d\mu = 0$ であれば、ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ であることを示せ。

[5] 次の積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$