解析学特別演習 II・小テスト解答解説 (8)

2011 年 2 月 3 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

最高点は 100 点 (3 人)，平均点 52.9 点でした．簡単な解説をつけます．

[1] 超関数として微分すると，$f' = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$ であり，$f'' = \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1$ です．f' はすべての $L^p(\mathbf{R})$ に入り，f'' はどの $L^p(\mathbf{R})$ にも入らないことに注意します．f_k を $(2k-1)$ 回微分すると，$f_k^{(2k-1)} = f'' * \cdots * f'' * f'$ (f'' が $k-1$ 個と f' の convolution) であり，$2k$ 回微分すると $f_k^{(2k)} = f'' * \cdots * f'' * f''$ (f'' が k 個の convolution) となります．一般に δ_a との convolution が平行移動であることとあわせると，$(2k-1)$ 階微分まではすべての $L^p(\mathbf{R})$ に入り，$2k$ 階微分から先はどの $L^p(\mathbf{R})$ にも入らないことがわかります．

[2] たとえば次のものが例です．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{2}, & -2 \le x \le -1 \text{ の時}, \\ 1 - \dfrac{x^2}{2}, & -1 \le x \le 1 \text{ の時}, \\ \dfrac{(x-2)^2}{2}, & 1 \le x \le 2 \text{ の時}, \\ 0, & \text{その他の時}. \end{cases}$$

この関数を超関数として 3 回微分すると，

$$f''' = \delta_{-2} - 2\delta_{-1} + 2\delta_1 - \delta_2$$

となります．これを Fourier 変換して，

$$-i\xi^3 \hat{f}(\xi) = e^{2i\xi} - 2e^{i\xi} + 2e^{-i\xi} - 2e^{-2i\xi},$$

すなわち $\hat{f}(\xi) = 2(2\sin\xi - \sin 2\xi)/\xi^3$ です．($\hat{f}$ は L^2 でないといけないので原点でもこうなります．) これより問題の条件が出ます．

[1] の問題の f が，$s < 3/2$ まで $H^s(\mathbf{R})$ に入ることは授業でやりました．そこで，これを 1 回積分すればだいたいいいんですが，単に 1 回積分すると L^2 にならないので，上のように少し細工してから積分しました．

$1/(1+|\xi|^3)$ の Fourier 逆変換なども答えですが，ここで聞いている具体的な表示の条件に合っていません．

[3] たとえば，$\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{\sin x}{x}$ などがそうです．指数減少しているが，C^∞-級でない関数を Fourier 逆変換したものはすべて答えになります．