解析学特別演習 II・小テスト (2) 解説

2007 年 11 月 5 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 20 点です．平均点は 35 点，最高点は 80 点でした．

[1] Plancherel の定理より，求める積分の値は次のようになります．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi^2 e^{-2|\xi|}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

この答えはもちろん前回の [3] (3) と同じです．また [3] で，$\xi = 0$ とおいたものにもなっています．

[2] $-\pi i(\operatorname{sgn}\xi)e^{-|\xi|}$ を逆 Fourier 変換すれば $\dfrac{x}{x^2+1}$ になるのでこれが答えです．

[3] $f(x) = e^{-|x|}$ の Fourier 変換は $\dfrac{2}{\xi^2+1}$ なので，$f*f$ の Fourier 変換は $\dfrac{4}{(\xi^2+1)^2}$ となります．$f*f(x) = (1+|x|)e^{-|x|}$ なので，逆 Fourier 変換の式より，$\dfrac{\pi}{2}(1+|\xi|)e^{-|\xi|}$ となります．

[4] 連続かつ可積分だが $\lim_{|x|\to\infty} f(x) \neq 0$ となるものならなんでも O.K. です．たとえば，$h(x) = \chi_{[-1,1]}(x)(1-|x|)$ として，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n^2(x-n))$ とすれば例になっています．

[5] $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ のとき正しいことはすぐわかります．一般の $f \in L^2(\mathbf{R})$ については，$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ の元で近似して極限を取ればできます．