解析学特別演習 II・小テスト解説 (3)

2006 年 12 月 4 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

この試験が本来の時間に実施できず，たいへん申しわけありませんでした．

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 77 点，最高は 100 点 (6 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] (20 点) 留数計算の有名な例として，どこにでも出ているので答えは省略します．(たとえば Ahlfors の Chapter 4, 5.3 の 3.)

[2] (30 点) $f \in C_0(\mathbf{R})$ の場合は簡単で，一般の場合は $C_0(\mathbf{R})$ が $L^p(\mathbf{R})$ で稠密なことを用いれば，$p = 1$ の場合と同様にできます．

[3] (30 点) $f * f * \cdots * f$ の Fourier 変換は，$(\hat{f})^k$ になるので，Fourier 変換してこれになる関数を探すのが簡単です．答えは $\dfrac{k\pi^{k-1}}{k^2 + x^2}$ です．

[4] (20 点) 条件を Fourier 変換することにより，$(\hat{f}(\xi))^k = \hat{f}(k\xi)$ となります．また，$f(x) = \overline{f(-x)}$ なので，条件の $k = 2$ の場合より，$\hat{f}(2\xi) \geqq 0$，すなわち $\hat{f}(\xi) \geqq 0$ がわかります．任意の正の整数 k について $(\hat{f}(\xi))^k = \hat{f}(k\xi)$ であるので ξ に ξ/k を代入して両辺の k 乗根を取ったものとあわせて，正の有理数 p について $(\hat{f}(\xi))^p = \hat{f}(p\xi)$ となります．$\hat{f}(\xi)$ の連続性によって，p を正の実数としても同じ式が成り立ちます．$f(x) = f(-x)$ を用いて，$\hat{f}(\xi) = c^{|\xi|}$, $c \geqq 0$ となりますが，$|\xi| \to \infty$ のとき，$\hat{f}(\xi) \to 0$ でなくてはならないので， $0 \leqq c < 1$ です．$c = 0$ のときは，$f(x) = 0$ でこれは明らかに O.K. なので他の場合を考えると，$\hat{f}(\xi) = e^{-c|\xi|}$, $c > 0$ と書けます．逆 Fourier 変換でこれを戻して，$f(x) = c/(\pi(x^2 + c^2))$, c は任意の正の実数, または $f(x) = 0$ が答えとなります．