解析学特別演習 II・小テスト (1)

2006 年 10 月 2 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答は別紙に書いてください．学生証番号，氏名を一番上に書いてください．

[1] Fatou の補題のステートメントを書け．

[2] 次のすべての条件を満たす，$\mathbf{R}$ 上の可測関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つ挙げよ．考えている測度は Lebesgue 測度である．挙げた例が条件を満たしている理由をきちんと示すこと．

(1) 各 $f_n(x)$ はほとんどいたるところ 0 以上の値をとる．

(2) ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(3) 各 n に対し，$f_n(x)$ は $\mathbf{R}$ 上可積分である．

(4) さらに $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx$ も存在するが，0 には等しくない．

[3] 次のすべての条件を満たす，$\mathbf{R}$ 上の可測関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つ挙げよ．考えている測度は Lebesgue 測度である．挙げた例が条件を満たしている理由をきちんと示すこと．

(1) 各 $f_n(x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続かつ可積分な実数値関数である．

(2) $\mathbf{R}$ 上の可測可積分関数 $f(x)$ があって，$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0$.

(3) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上連続ではない．

[4] 次のすべての条件を満たす，$\mathbf{R}$ 上の可測関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つ挙げよ．考えている測度は Lebesgue 測度である．挙げた例が条件を満たしている理由をきちんと示すこと．

(1) 各 $f_n(x)$ は $\mathbf{R}$ 上可積分な実数値関数である．

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|\,dx = 0$.

(3) どの $x \in \mathbf{R}$ についても，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ とはならない．

[5] 次のそれぞれの命題は正しいか．正しければ証明し，誤っていれば反例を挙げよ．きちんと理由も示すこと．

(1) $(0,1)$ 区間の開かつ稠密な集合は Lebesgue 測度 1 を持つ．

(2) $(0,1)$ 区間上の Lebesgue 可測可積分関数 $f(x)$ が，すべての $x \in (0,1)$ に対して $f(x) \geq 0$ を満たし，また，$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ を満たせば，ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ である．

(3) $(0,1)$ 区間の Lebesgue 可測集合が連続濃度を持てば，その Lebesgue 測度は正である．

(4) $\mathbf{R}$ 上の実数値可測関数 $f(x)$ について，$\int_{-N}^{N} f(x)\,dx$ が $N \to \infty$ で極限を持てば，$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上可積分である．

[6] その他，この授業・演習に注文，希望，文句などがあればどうぞ．