解析学特別演習 II・小テスト解説 (7)

2007 年 2 月 2 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

採点は Teaching Assistant の石谷君です．平均は 61.7 点，最高は 100 点 (1 人) でした．簡単な解説をつけます．

[1] (40 点) 超関数として，$f'(x) = \chi_{[-1,0]}(x) - \chi_{[0,1]}(x)$ であることがわかるので，これより，

$$i\xi \hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = (2 - 2\cos\xi)/(-i\xi)$$

となり，$\hat{f}(\xi) = (2 - 2\cos\xi)/\xi^2$ となります．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2-2\cos\xi)^2}{\xi^4}(1+\xi^2)^s\, d\xi < \infty$$

となる条件は，$s < 3/2$ なのでこれが答えです．

[2] (10 点 $\times 3$)

(1) ξ を固定して $\varepsilon \to 0$ としたとき，$(e^{-ix(\xi+\varepsilon)} - e^{-ix\xi})/\varepsilon$ が $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ において $-ixe^{-ix\xi}$ となることがわかります．よって，$f'(\xi) = \langle T, -ixe^{-ix\xi}\rangle$ となります．何回でもこれが繰り返せるので，$f(\xi)$ は C^∞-級です．

(2) supp$T$ の近傍を含むコンパクト集合 K について，$C > 0, m \in \mathbf{N}$ が存在し，

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le C \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in K} |\varphi^{(k)}(x)|$$

となります．これを $\varphi(x) = e^{-ix\xi}$ について適用すれば結論が出ます．

(3) $\varphi(\xi)$ を $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ の元とします．$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\varphi(xi)\, d\xi$ を考えると，Riemann 和がこの積分に収束するのは，x の関数としての $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ における収束になっていることがわかります．したがって，

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle T, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\varphi(xi)\, d\xi\rangle$$

を得ます．これは緩増加超関数として，$f = \hat{T}$ を意味しています．

[3] (30 点) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ を，$\hat{\varphi}$ が compact 台を持つように取ります．まず，

$$\langle \widehat{T*S}, \hat{\varphi}\rangle = 2\pi\langle T*S, \check{\varphi}\rangle = 2\pi\langle T, (S*\varphi)\check{}\rangle$$

がわかります．

一方，

$$\langle \hat{T}, \hat{\varphi}\hat{S}\rangle = \langle \hat{T}, \widehat{S*\varphi}\rangle = 2\pi\langle T, (S*\varphi)\check{}\rangle$$

なので，$\widehat{T*S} = \hat{T}\hat{S}$ がしたがいます．