解析学 VI 冬学期試験問題略解 (2/1/1992)

河東泰之

[1] $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\ dx = \frac{2\sin\xi}{\xi}$だから，$\displaystyle\sqrt{|\xi^2|+1}^s\frac{2\sin\xi}{\xi} \in L^2(\mathbf{R})$ となる $s > 0$ の範囲は，$s < 1/2$ である．

[2] $\displaystyle\frac{\sin x}{x}$, $\displaystyle\frac{1}{e^x+e^{-x}}$の Fourier 変換はそれぞれ，$\pi\chi_{[-1,1]}(\xi)$, $\displaystyle\frac{\pi}{e^{\pi\xi/2}+e^{-\pi\xi/2}}$である．よって，求める積分は

$$\frac{1}{2\pi}\pi^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{e^{\pi\xi/2}+e^{-\pi\xi/2}}\ d\xi = \Big[\arctan e^{\pi\xi/2}\Big]_{-1}^{1} = \arctan e^{\pi/2} - \arctan e^{-\pi/2}$$

である．

[3] $x = (x_n) \in \ell^1$, $y = (y_n) \in \ell^1 = c_0^*$に対し，

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \sum_n(\sum_{m\geq n} x_m)y_n = \sum_n x_n(\sum_{m\leq n} y_m)$$

より $(T^*y)_n = \sum_{m=1}^n y_m \in \ell^\infty$である．($\sum_{n,m\geq 1}|x_n||y_m| < \infty$ だから和の順序の交換は問題ない.)

[4] 作用素 Sを $S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ で定めると，Tが compact であることと STが compact であることは同値である．よって，求める条件は $c_n \to 0$ である．

[5] $\displaystyle\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon}$の Fourier 変換は$-2\pi i e^{-\varepsilon|\xi|}$であるから，求める極限値は

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|\xi|}\hat{f}(\xi)\ d\xi = -i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\ d\xi = -2\pi i f(0)$$

である．(Lebesgue の収束定理を使った.)

[6] 完全正規直交系 $\{e_n\}_n$を取る．$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ で生成される部分空間への射影を P_nとおく．Compact 作用素 Tに対し，授業でやったように $\|P_nT - T\| \to 0$ である．またこれより，$\|TP_n - T\| = \|P_nT^* - T^*\| \to 0$ でもある．(T^*も compact であることに注意.) したがって，$\|P_nTP_n - T\| \leq \|(P_nT - T)P_n\| + \|TP_n - T\| \to 0$ である．このことと $P_n\mathcal{K}(H)P_n$が n 次元行列環と同型で可分であることより，結論が得られる．

[7] 成り立たないことを反例によって示す．2 つ作り方をあげる．

(1) $f \in L^1(\mathbf{R})$, $g \in L^2(\mathbf{R})$ を，$\mathrm{supp} g \subset [-1,1]$ $\mathrm{supp} f \subset [-1,1]$, $\|g\|_2 = 1$, $\|f * g\|_2 > 0$ となるように取る．$g_n(x) = g(x-n)$ とおけば，$\{g_n\}_n$は 0 に弱収束しているが，$\|f * g_n\| > 0$ は一定であり，$T_f g_n$は 0 に強収束していない．

(2) $\hat{f}(\xi)$ が $C_0^\infty(\mathbf{R})$ に属し，区間 $[0,1]$ で 1 に等しいように，$f \in L^1(\mathbf{R})$ を取る．($C_0^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ であり，$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ の元の Fourier 変換は再び $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^1(\mathbf{R})$ の元となることを使う.）$h_n(\xi) = \chi_{[0,1]}(\xi) e^{2\pi i n \xi}$ とおけば，$\{h_n\}$ は 0 に弱収束している．そこで，h_nの逆 Fourier 変換に T_fをほどこしたものを考えれば，もとは，0 に弱収束しているのに，T_fをほどこしたものは，0 に強収束していないことがわかる．

[8] まず Tが単射で，$\overline{T^*Y^*} \neq X^*$ としよう．すると，Hahn-Banach より，0 でない $x \in X^{**} = X$が存在して，すべての$\phi \in Y^*$に対し，$\langle x, T^*\phi \rangle = 0$ となる．これは，$\langle Tx, \phi \rangle = 0$ を意味するから，再び Hahn-Banach より，$Tx = 0$ となる．Tは単射だったから矛盾である．

次に，$\overline{T^*Y^*} = X^*$で，$Tx = 0$ としよう．このとき，すべての$\phi \in X^*$に対し，$\psi_i \in Y^*$が存在して，$\phi = \lim_i T^*\psi_i$となるので，$\langle x, T^*\psi_i \rangle = \langle Tx, \psi_i \rangle = 0$ を用いて，$\langle x, \phi \rangle = 0$ を得る．これは，$x = 0$ を意味する．

[9] X内の点列 $\{x_n\}_n$を，$\|x_n\| = 1$, $\|Tx_n\| \to \|T\|$ となるように取る．このとき，$\{x_n\}_n$ の部分列（再び $\{x_n\}_n$と書く）が取れて，$x_n \to x$（弱収束）とできる．すると $Tx_n \to Tx$（強収束）となるので $\|Tx\| = \|T\|$ である．もし，$x = 0$ ならば何も問題はないし，そうでなければ，$\|x\| = 1$ である．

[10] 背理法による．$x = 0$ として一般性を失わない．部分列を取ることにより，$\{x_n\}_n$が 0 に弱収束しているのに，$\|x_n\|_1 \geq \varepsilon > 0$ と仮定できる．(ここで各 $x_n = (x_n(k))$ は ℓ^1の元である.）このとき，自然数の増大列 $\{a(n)\}_n$と $\{x_n\}$ の部分列 $\{y_n\}$ を以下のように取る．まず $a(0) = 0$, $y_1 = x_1$とし，$a(n-1)$ までと y_nまでが与えられたときに，$\sum_{k=1}^{a(n-1)} |y_n(k)| \leq 1/n$ が，成立しているとしよう．このとき，$a(n)$ を$\sum_{k=a(n-1)+1}^{a(n)} |y_n(k)| \geq \|y_n\|_1 - 2/n$ となるように取る．さらに十分大きい m を取れば，$|x_m(k)| \leq 1/(a(n)(n+1))$, $k = 1, 2, \ldots, a(n)$ とできるのでこの x_mを y_{n+1}とおく．すると，$\sum_{k=1}^{a(n)} |y_{n+1}(k)| \leq 1/(n+1)$ が成立しているのでこの構成が帰納的に続行できる．このとき，$\sum_{k=1}^{a(n-1)} |y_n(k)| + \sum_{k=a(n)+1}^{\infty} |y_n(k)| \leq 2/n$ が成立している．ここで $x = (x(k)) \in \ell^\infty$を，$|x(k)| = 1$ で，$a(n-1) < k \leq a(n)$ のとき $x(k)y_n(k) = |y_n(k)|$ となるようにおく．すると，$|\langle x, y_n \rangle \geq \sum_{k=a(n-1)+1}^{a(n)} |y_n(k)| - |\sum_{k=1}^{a(n-1)} x(k)y_n(k) + \sum_{k=a(n)+1}^{\infty} x(k)y_n(k)| \geq \varepsilon - 2/n - 2/n$ であるから，$n \to \infty$ として矛盾を得る．