複素解析学 I 期末テストについて

河東泰之

まず，答案に書いてある細い赤数字が期末試験の点数（最大 200 点），太い赤数字が 12 月の中間テストも考慮した総合的な点数（100 点で頭打ち）で，太い赤の英字（A,B,C,D）が最終成績（優，良，可，不可）です．

期末試験の平均点は，61.4 点，得点分布は下のとおりでした．

0–39 (点)	40–59	60–79	80–99	100–119	120–149	170–
24 (人)	10	12	11	6	5	1

また，12 月の試験の点数を x_1, 今回の試験の点数を x_2としたとき，総合点 x（太い赤数字）は，$x = 0.3\min(\max(x_1, x_2), 100) + 0.7\min(x_2, 100)$ と計算しました．この総合点の平均点は，55.0 点，得点分布は下のとおりでした．

0–19 (点)	20–39	40–59	60–79	80–99	100
16 (人)	12	11	12	12	12

この総合点 x によって，次のように成績を決めましたが，あと一歩で D から C になる人の場合は，演習の実績で救済した例があります．

(1) $80 \le x$ の場合：成績 A（25 人）
(2) $65 \le x < 80$ の場合：成績 B（8 人）
(3) $50 \le x < 65$ の場合：成績 C（11 人）
(4) $x < 50$ の場合：成績 D（31 人 — 期末試験欠席者 6 人を含む —）

期末試験の採点そのものは，かなり甘くつけてあります．その結果，点数はわりと高めになったので，点数と成績の対応は特に配慮を加えず普通にしてあります．

採点ミス，成績のつけ間違いなどがあると思う人はできるだけ早く申し出てください．

成績 D の人については追試を（多分 7 月に）行いますので，追試受験希望の人は本郷理学部 5 号館 1 階の掲示に注意してください．

以下，問題についてコメントします．

[1] これは，授業でやった$\zeta(2)$ と$\zeta(4)$ の方法をそのまままねすればいいので，わりとよくできていました．だから授業の方法さえわかっていれば，これは単なる計算問題です．計算はわりとめんどうですが，答えは$\pi^6/945$ です．計算ミスもたくさんありましたが，少ししか減点していません．

[2] 授業でやった$\pi\cot\pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}, n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right)$ と同様に証明するのですが，いきなり$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z-n}$を考えるのは収束に問題があります．Mittag-Leffler の定理のようにやるのなら，まず$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}(-1)^n(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$ と，広義一様絶対収束するようにしておいてから，$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-m}^{m}(-1)^n\frac{1}{z-n}$ と変形する必要があります．（わざわざ$\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ではなく$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-m}^{m}$と書いてあることに注意.）

別の方法では，$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi z}{2} - \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi(z-1)}{2}$と最初に変形しておけば，$\pi \cot \pi z$の式に帰着できます．

[3] 一人指摘していた人がいたように，これは佐藤超函数 (hyperfunction) に関する問題です．ちゃんとできていた人は一人だけでした．

ϕは，実軸上だけで定義された連続関数なので，複素平面上の正則関数のようにあつかうのは誤りです．

[4] これは，単に$1 - \frac{2}{\pi} \arg z$とすればおしまいです.（$\arg z$は，zの偏角で，今$0 \leq \arg z < 2\pi$と取る.）一番やさしい問題のつもりで出したのですが，手をつけている人は少ししかいませんでした．$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$というのがいくつかありましたが，これは調和ではありません．

[5] これは演習の問題の中にあったもので，いろいろなやり方がありますが，次の 3 通りの答案がありました．

(1) まず一番地道な方法は，

(2) 次にもう少しうまく考えると，

(3) さらに，もっとうまいのは，変換 $z + \frac{1}{z}$を使うことです．これを知っていれば，

[6] これは，40 点としてありますが，Dirichlet 級数のごく基礎的なことだけでできてしまう問題で，(2) については，Dirichlet 級数とは何かさえ知らなくてもできます．