1996年度解析学VII・関数解析学期末テスト解説

1996年9月17日
河東泰之

答案の中央上に書いてあるのがこの試験の成績，右上に書いてあるのがレポートも加味した総合得点，そしてその横のA〜Dが成績です．配点は，1番から順に，20, 20, 20, 25, 25, 25, 30点で合計165点満点です．最高点は160点，平均点は63.4点，試験の得点の分布は次のとおりです．

0–39 (点)	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–109	110–
12（人）	4	5	5	8	2	3	2	5

2回のレポートの点数（ぞれぞれ20点満点）を，x_1, x_2とし，$\min(100, \text{期末試験の点数})$を$x$としたとき，総合得点は$0.6x + \max(0.2x, x_1) + \max(0.2x, x_2)$で計算しました.（前に予告したとおりです.）この総合点の平均点は66.1点，分布は次のとおりです.

0–39 (点)	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
9（人）	3	6	3	8	5	5	7

成績と点数の対応は次のとおりです．配点，採点基準もこめてだいぶ甘くしたつもりです．

$$\begin{aligned} 80\text{ 点以上}A &\quad (17\text{ 人}),\\ 65\text{ 点以上 }79\text{ 点以下}B &\quad (9\text{ 人}),\\ 45\text{ 点以上 }64\text{ 点以下}C &\quad (10\text{ 人}),\\ 44\text{ 点以下}D &\quad (10\text{ 人}). \end{aligned}$$

以下，各問に略解，解説を付けます．実際の答案ではもっと詳しく説明しないと減点になります．

[1] 複素数体$\mathbf{C}$に通常のnormが入ったものと同型です.「Banach空間として」の話をしているのだから，normの入り方まで見ないといけません．単に線型空間として$\mathbf{C}$と同型というだけでは不十分です．

[2] 例えば，$(T_n f)(x) = f(x-n)$あるいは$(T_n f)(x) = e^{inx} f(x)$などとおけばO.K.です．この2つは，Fourier変換で移り合えるので，同じ事です．これは実質的に授業でやった問題です．

[3] (1) これも授業でしました．ただ，授業では Banach 空間でやったので，Hahn-Banach を使いましたが，今は Hilbert 空間なのでもっと簡単です．

(2) $x \neq 0$ としてよいので，$\|x\| = 1$ と仮定できます．すると，

$$1 = |(x, Tx)| = |(T^*x, x)| \leq \|T^*x\|\|x\| \leq \|T^*\| \leq 1$$

より，Cauchy-Schwarz で等号が成り立っているので，$T^*x = cx$, $c \in \mathbf{C}$ であることがわかり，$c = 1$ であることもすぐ出ます．

[4] 例えば，$f_n(x) = \chi_{[n,\infty)}(x)$ などとおいて，Banach limit の類似を考えればできます．ほかにもいろいろやり方はありますが，いずれにしろどこかで Hahn-Banach を使います．

[5] X, Yが dense なことはすぐできます．(単調収束定理，あるいは Lebesgue の収束定理.)

fが，ある $[-n, n]$ の外でほとんどいたるところ 0 とすると，$\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x)e^{-ix\xi}\, dx$ なので，ξを複素数に取ることができ，積分記号下での微分をすると，$\hat{f}$は全平面で正則になることがわかります．さらに$\hat{f}$が，ある $[-m, m]$ の外でほとんどいたるところ 0 であれば，一致の定理より，$\hat{f} = 0$ となります．

Fourier 級数を使ってもできます．

[6] スペクトルがすべて実数であること，スペクトルは可算集合で原点にだけ収束し，原点以外は多重度有限の固有値であることと，スペクトル分解をくみあわせればわりとすぐにできます．(スペクトル分解を使わなくても，直接にもできます.)

[7] $h \in L^\infty(0, 1)$ の時にも，同様にして M_hを定義すると，答えは $\{M_h \mid h \in L^\infty(0, 1)\}$ です．これらが M_g, $g \in C[0, 1]$ と可換なのは明らかだから，Tが M_g, $g \in C[0, 1]$ と可換だとします．$E \subset [0, 1]$ を可測集合とします．測度論でよくやるように，$g_n \in C[0, 1]$ で，$0 \leq g_n(x) \leq 1$ でかつ $g_n(x) \to \chi_E(x)$, a.e. となるものが取れます．すると，$M_{g_n}T = TM_{g_n}$ から，$M_{\chi_E}T = TM_{\chi_E}$がわかります．定数関数 1 に Tを施したものを $h \in H$とします．$T\chi_E = h\chi_E$がわかるので，$\|T\| < \infty$ であることから，$h \in L^\infty(0, 1)$ が示せて，$T = M_h$がわかります．