1996 年度解析学 VII・関数解析学・演習問題

5/22/1996

河東泰之

[19] $L^p(\Omega)^*$が $L^q(\Omega)$ であるという授業の証明で,「すぐできる」と言って飛ばした次の 4 点について，証明せよ.

(1) $g \in L^1(\Omega)$ で，Ωの任意の可測集合 Eについて，$\mu(E) > 0$ ならば$\left|\dfrac{1}{\mu(E)} \displaystyle\int_E g(x)\, d\mu\right| \leq C$であるとする.（$C$は定数である.）この時，$|g(x)| \leq C$が$\Omega$上ほとんどいたるところ成り立つ.

(2) $\mu(\Omega) < \infty$ の時，$L^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である.

(3) $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$で，各$\Omega_n$について$\mu(\Omega_n) < \infty$ であり，また$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$であるとする.各 $g_n \in L^q(\Omega_n)$ を，$f \in L^p(\Omega_n)$ ならば$\phi(f) = \displaystyle\int_\Omega f(x) g_n(x)\, d\mu$となるように取る．この時，$\Omega_n$上ほとんどいたるところ，$g_n(x) = g_{n+1}(x)$ である.

(4) 上の状況で$\bigcup_{n=1}^\infty L^p(\Omega_n)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である.

[20] ℓ^1から c_0への作用素 Tを $\{Tx\}_n = \{\sum_{m \geq n} x_m\}_n$で定める．これが有界線型作用素であることを示せ．この norm は何か.

[21] Xを Banach 空間，Yをその（閉とはかぎらない）部分空間とする．Yの annihilater $Y^\perp$を,

$$Y^\perp = \{\phi \in X^* \mid \phi(y) = 0,\ \ \forall y \in Y\}$$

と定め，また X^*の部分空間 Zに対し,

$$Z^\perp = \{x \in X \mid \phi(x) = 0,\ \ \forall \phi \in Z\}$$

とおく．この時，次の各命題を示せ.

(1) $Y^\perp$は X^*の閉部分空間である.

(2) $Y^{\perp\perp}$は Yの閉包に等しい.

(3) もし，Yが Xの閉部分空間であれば，Y^*は，$X^*/Y^\perp$と同型である.

[22] sup norm に関する Banach 空間 $C[0,1]$ を考える．この部分集合 X_nを,「すべての $y \in [0,1]$ に対して，$|f(x) - f(y)| \leq n|x-y|$」となるような $x \in [0,1]$ が存在するような $f(x)$ の集合とする．各 X_nは閉集合で内点を持たないことを示せ．このとき Baire の category 定理から何がわかるか.

[23] X, Y, Zを Banach 空間とする．$X \times Y$から Zへの作用素 Tが次の条件を満たすとする．

(1) 各 $x \in X$に対し，$y \mapsto T(x, y)$ は Yから Zへの有界線型作用素である．

(2) 各 $y \in Y$に対し，$x \mapsto T(x, y)$ は Xから Zへの有界線型作用素である．

この時，Xで $x_n \to x$, Yで $y_n \to y$であれば Zで $T(x_n, y_n) \to T(x, y)$ であることを示せ．

これまでの演習問題の中から次のように選択して，6 月 5 日（水）の授業の際に提出してください．採点して返却します．

(1) [3], [6], [8], [17], [19] の中から 2 題．

(2) [5], [12], [15], [21] の中から 1 題．

(3) [7], [13], [22], [23] の中から 1 題．

この後，もう 1 回，7 月 17 日にレポートを出してもらいます．2 回のレポートは各 20 点満点で採点します．その点数をそれぞれ x_1, x_2点とし，期末試験の点を x 点としたとき，最終成績は $0.6x + \max(0.2x, x_1) + \max(0.2x, x_2)$ 点とします．

これまでの演習問題のファイルは，http://www.ecc.u-tokyo.ac.jp/˜nyasu/ で取れます．