1

多様体論について

1.1　なぜ多様体を学ぶか

現代の数学を志す学生諸君に多様体を学んで欲しい理由は、おおざっぱに言って次の３つの点である。

(1) 多様体は幾何学の対象として実際に様々な場面で現れるものであること。

(2) 多様体は現代の幾何学の問題設定の枠組みを与えるものであること。

(3) 多様体の定義から、ベクトル場や微分形式の概念の定義、代数的な構造の抽出、上部構造の定式化にいたる多様体の理論は、現代数学の理論構成の典型を与えるものであること。

最初のポイントは、多様体理論の成立した背景から考えると良くわかることかもしれない。

曲面論においては、方程式の表す図形はほとんどの場合局所的に関数のグラフの形に書かれることがわかるし、空間全体でなく、曲面の上だけで定義された曲率等の関数を取り扱う必要が生じる。また、方程式の表す図形に対して、それを記述する一般的なパラメータのとり方から曲率などを書き表すと対称性のある表示が得られることや、場合によってはパラメータのうまいとり方を工夫すると図形の形がきれいに記述される。

また、複素関数論においては、複素関数に対して，その自然な定義域が定まり，その定義域の形状を考えることにより、線積分の振る舞いが理解しやすくなる。

さらに、古典力学や流体力学の記述のために使われたベクトル解析では、次元の高い空間上での解析が必要になる。エネルギーや運動量のような不変量があることにより、このような空間内での運動はより狭い空間に束縛される。そこで、次元の少し下がった空間上で、パラメータのとり方を様々に取り換えて解析を行なうことが必要になる。また、各点にベクトル量が与えられている場に対しての解析を行なうことが必要になるが、それはベクトル場、微分形式の定義が自然なものであることを示している。

このような様々な場面に現れる対象を抽象して、多様体という構造を持つものを考えるのが非常に自然であることがわかったのである。

実際に現れる幾何学的対象の中で必要な性質だけを抽象して定義としたものが多様体の定義である。

このような幾何学的対象の最も基本的な性質は、各点のまわりでは「座標」によって記述されるということである。その性質を抽象して位相多様体というものを定義することができる。

位相多様体とは「局所ユークリッド的ハウスドルフ空間」のことである。「空間」とは位相空間すなわち開集合、閉集合あるいは近傍の概念が定まった空間であり,「局所ユークリッド的」とは、任意の点 x に対して、x の近傍 U, ある次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合 V で、U, V が同相となるものをとることができることである。「ハウスドルフ」とは、２点を分離する開集合がとれる、すなわち、相異なる２点 x, y に対して、開集合 U, V で、$x \in X$, $y \in V$, $X \cap Y = \emptyset$ となるものが存在することである。

定義 1.1.1. 位相空間 X が n 次元位相多様体であるとは、X はハウスドルフ空間であり，任意の点 $x \in X$ に対し、x の近傍 U で、$\mathbf{R}^n$ の開集合 V と同相なものが存在することである。

座標があれば、点は数値の組 $(x_1, \ldots, x_n)$ で表され、その上の関数は $f(x_1, \ldots, x_n)$ のように表される。自然に現れてくる曲面上では微分積分を行なうことが出来、それにより、幾何的性質を明らかに出来た。しかし、位相多様体上では、微分は考えにくい。微分をするときには、点の位置の変化に対する、

関数の変化の割合を考える。位置の変化を道のりで表そうとすると次のような例を考えると関数の変化が記述できないことがわかるであろう。

例 1.1.2 (コッホ曲線). 正三角形から始める。それぞれの辺を３等分し、辺の中央の $\dfrac{1}{3}$ を一辺とする正三角形を書く。辺の中央の $\dfrac{1}{3}$ を正三角形の２辺に置き換える。これを繰り返す。これはある図形に収束する。この図形は、いたるところ微分不可能な曲線として von Koch (1870–1924) により与えられた。このような図形は、ここ２０年くらいフラクタルと呼ばれ研究されている。

この図形は円周と同相である。３つの点に対し巡回順序が定義されることから、円周との同相写像が定義される。この図形上、自然に定義される道のりで、２点間の距離は無限大である。このことは長さが構成の途中で順に $\dfrac{4}{3}$ 倍になることからわかる。普通の単位円周の長さは、2π である。長さの構造を自然に考えて微分しようとするといつでも無限大で割ってしまう。

これは、同相写像が長さの有限性を保たないことが原因である。

微分が行なえることを要求すると、局所ユークリッド的というだけではなく、ユークリッド空間の開集合と同相な近傍の間の関係（座標変換）をきちんと整備する必要がある。こうして、微分可能多様体の概念にたどり着くのである。

このような定式化により、微分可能多様体の概念が確立される。多様体は、各点の近傍の性質が一定であるような等質な空間である。このような等質な空間の理論がきちんと出来上がることにより、特異点を持つような空間も扱えるようになる。

こうして、微分可能多様体が定義されると、すでに定義した位相多様体と微分可能多様体は本質的に異なるかという疑問が現れる。これは、微分可能構造を位相多様体の上部構造と見て、「位相多様体に微分可能構造を入れられるか」あるいは、「微分可能構造は何通りあるか」という問になる。

コッホ曲線の場合は、円周と同相だから、円周の座標を入れれば、普通の円周として微分可能多様体の構造が入るというように考える。２０世紀の数学の成果として、次のようなことがわかっている。１次元、２次元、３次元では微分可能構造は入り、一意である。４次元では、微分可能構造が入らないものが

ある。また一意とは限らない。これはドナルドソン Donaldson, フリードマン Freedman による１９８２年－８６年の結果である。, それ以前に７次元では微分構造は一意とは限らないことをミルナー Milnor が示している。実際、彼は１９５６年に７次元球面には２８個の微分構造があることを示した。このことから８次元の位相多様体で微分構造を持たないものがあることもわかる。

これらの問題はポアンカレ予想に関係がある。ポアンカレ予想は「３次元多様体 X がコンパクト連結に単連結ならば X は３次元球面と同相」というものである。１００年位前に予想した。多様体の概念がはっきりと定式化されていない時代に述べられたものである。ホモロジー理論を作った。３次元多様体がホモロジーが球面と同じならば同相という論文を書いた。誤りに気が付いて、ホモロジーが３次元球面に等しいが、基本群が３次元球面と異なるポアンカレホモロジー球面を構成した。n 次元球面に対して、単連結でホモロジー群がホモロジーが n 次元球面と同じならば同相かという一般化されたポアンカレ予想が考えられる。$n \geqq 5$ のときに正しいことをスメールが１９６０年代に解いた。１９８５年ころ $n = 4$ のときに正しいことを、フリードマンが解いた。S^n と微分同相になるかという問題がある。これは、４次元では未解決７次元では上に述べた反例がある。

このような問題が定式化されるというのは、すでに２番目の点の一部分である。つまり、「ある一つの性質を持つ多様体は、どのようなものか」というような問が定式化されるということである。また、一旦、解析を行なう場としての多様体が定義されると、その上の常微分方程式、偏微分方程式、多様体の間の写像、多様体上の構造についての様々な問題が定式化される。現代の幾何学の多くの問題は多様体上で定義された様々な概念についての問題である。

３番目について述べよう。多様体の理論の構成は次のようなものである。まず、多様体の定義は、各点の近傍の記述と近傍の間の関係および分離公理から成立っている。その定義から、ベクトル場および微分形式が定義されるが、これらは自然に区別されているものである。ベクトル場の全体は、リー代数の構造を持ち、その積分としてリー群の作用などが考えられる。微分形式は次数付き微分加群の構造を持ち、ドラーム コホモロジーという不変量を与える。多様体が定義されるとその上部構造として、リーマン構造、複素構造、シンプレク

ティク構造、接触構造、葉層構造などがが定式化される。こうして新しい視点で幾何学を見直すことができるようになるのである。

問 1.1.3. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点 $P_1, ..., P_k$ と、それらの中の 2 点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}, ..., C_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ が与えられているとする。これらの線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1, \ldots P_k\}$ と両端のみで交わるとする。(すべて $\mathbf{R}^3$ の部分集合と考える。) $\{P_1, \ldots P_k\}$ とこれらの線分の和集合 X が、部分空間としての位相について 1 次元位相多様体となるための条件は何か。このとき、線分の個数と点の個数との間にはどのような関係があるか。

余裕があれば、$P_1, ..., P_k$ の中の 2 点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}, ..., C_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ と、3 点を頂点とする三角形 $T_1 = \triangle P_{u_1}P_{v_1}P_{w_1}, \ldots, T_\ell = \triangle P_{u_\ell}P_{v_\ell}P_{w_\ell}$ が与えられ、これらの三角形の辺は、$C_1, \ldots, C_m$ のどれかであり、三角形の内部と線分や $\{P_1, \ldots P_k\}$ は交わらないとする。また、線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1, \ldots P_k\}$ と両端のみで交わるとする。$\{P_1, \ldots P_k\}$、線分、三角形の和集合 Y が部分空間としての位相について 2 次元位相多様体となるための条件を考えてみよ。

解答。位相多様体の定義を満たしているかを検証する。ハウスドルフ空間であることは、ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$（ハウスドルフ空間）の部分空間であることから従う。1 次元位相多様体であることは、任意の点の近傍として、直線と同相なものがとれることである。（ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の δ 近傍 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ は、$\mathbf{R}^n$ と同相である。）従って、まず線分 C_a の内点 p は、$\mathbf{R}$ と同相な δ 近傍をもつ。δ として、$\min\{\|p-q\| \mid q \in C_b,\ C_b \neq C_a\}$ より小さいものをとればよい。点 P_a について、P_a がちょうど 2 つの線分 C_a, C_b の端点であるときは δ を $\min\{\|p-q\| \mid q \in C_c,\ C_c \neq C_a,\ C_c \neq C_a\}$ よりも小さくとれば P_a の δ 近傍は $\mathbf{R}$ と同相である。P_a が孤立点、一つだけの線分の端点、3 つ以上の線分の端点である時は、どんな近傍をとっても $\mathbf{R}$ と同相にならない。実際、P_a を端点とする線分の点のみからなる連結な近傍 U をとり、$U - \{P_a\}$ を考えるとその連結成分の数は、0 個、1 個、3 個以上となるが、1 次元ユークリッド空間の連結な区間からその内部の点を取り除くと成分の数は 2 となる。こうし

て、X が1次元位相多様体となる必要十分条件は、P_i が2つの線分の端点になることである。このとき、線分の個数と点の個数は等しい。（実際にはいくつかの円周の非連結和と同相な図形となる。）

後半は、証明をつけて解答を与えることは、ホモロジーあるいはホモトピーの知識が必要である。状況を考えると、次の2つの条件を満たすことが正しい答であることは納得できると思う。

条件の一つは、各線分がちょうど2つの三角形の境界となっていることである。（そうでないと線分上の点で局所ユークリッド的でない。）

もう一つの条件は、点 P_i は、三角形の頂点となっており、点 P_i を頂点とする三角形を $T_{i_1} = \triangle P_i P_{v_1} P_{w_1}, \ldots, T_{i_s} = \triangle P_i P_{v_s} P_{w_s}$ とするときに、線分 $P_{v_1} P_{w_1}, \ldots, P_{v_s} P_{w_s}$ の和集合が連結である（一つの円周と同相になっている）ことである。（そうでないと、P_i の近傍から P_i を除くと連結でなくなり、局所ユークリッド的でない。）