解説 —— リー群の表現論における最近の進展

小林俊行

解析的表現論は 20 世紀後半以降，飛躍的に発展してきた．その一方で，初学者は，高度に発展した多くの抽象的事項を学習せねばならず，古典的な例から素養を身につける時間が確保しにくくなっているようにも見受けられる．

さて，杉浦光夫氏による本講義録では，リー群 $SL(2,\mathbb{R})$ の

- 既約ユニタリ表現の分類
- Plancherel 型定理

について，できるだけ予備知識を仮定せずに紹介することを最終目標としている．そこでは，函数論や直交多項式を駆使することで，早く結論に到達する工夫が施され，杉浦氏らしい几帳面な計算と証明が与えられている．解析的表現論の萌芽期が偲ばれ，現代の読者にも取組みやすい入門書といえよう．

本講義録（以下「本書」と記す）では，限定された素材である $SU(2)$ や $SL(2,\mathbb{R})$ の特殊性に依存した議論が多用されている．現代の表現論から見て，

- 本書の題材である群 $SL(2,\mathbb{R})$ はどのように位置づけられるか？
- $SL(2,\mathbb{R})$ の場合でさえ一見複雑な主結果を，別の見方で理解できるか？
- 高次元のリー群に対しても本書の証明法が適用できるのか？
- より普遍的な視点や手法は，その後，生まれているのか？
- 本書のテーマに関して，現在，何が解明されていて，何が未知か？
- 本書の執筆後に生まれた重要なテーマは？

などの疑問を持たれる読者もいらっしゃることであろう．

紙数の関係上，これらの疑問に十分に答えることは不可能であるが，できるだけ最先端の研究の雰囲気が伝わるように，この「解説」の執筆を心がけた．リー群の表現論に興味をもたれた読者が，今後さらなる学習をされる際の一助となれば幸いである．

I　本書の題材である群 $SU(2)$ や $SL(2,\mathbb{R})$ の位置づけ

本書では 3 次元のリー群 $SU(2)$ や $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論が主テーマとなっている．そもそも，この 2 つの群がなぜ選ばれているのだろうか？

まず $SU(2)$ と $SL(2,\mathbb{R})$ はいずれも非可換な群である．位相空間としては $SU(2)$ はコンパクト，$SL(2,\mathbb{R})$ は非コンパクトであり，大域的なトポロジーが異なる．これに呼応してこの 2 つのリー群の表現論やそれに付随する大域解析に顕著な差が現れるが，その一方で，両者には多くの共通点もある．これらのことを 2×2 の行列で手計算をしながら学ぶのに良い教材となっている．

第 I 節ではさらに一歩踏み込んで，$SU(2)$ や $SL(2,\mathbb{R})$ というリー群が，数学のどのような分野につながっているかについて，本書では取り上げていない次の 2 つの側面から解説してみよう．

- 幾何的な側面（定曲率空間，第 I.1 節）
- 代数的な側面（単純リー環，第 I.2 節）

I.1.　幾何的な側面からみた $SU(2)$ と $SL(2,\mathbb{R})$

空間の “曲がり方” を無限小のレベルで表す量が**曲率**である．リーマン幾何では何種類かの曲率が定義され，スカラー曲率，リッチ曲率，断面曲率という順に情報量が多くなる．

断面曲率が一定である空間は対称性が極めて高い空間であり，この空間を舞台として，微分幾何，不連続群論，リー群論，表現論，整数論，大域解析学など，数学のさまざまな分野からの問題と手法が交差する．一方，対称性の高い空間における精緻な結果は，より一般の幾何における未来の理論を照し出すことがある．このような “モデル” としての役割から，断面曲率が一定の多様体は**空間形** (space form) と呼ばれる．空間形は，通常の距離が定義できるリーマン多様体だけではなく，相対性理論の時空に用いられるローレンツ多様体，あるいはより一般に任意符号の計量をもつ擬リーマン多様体に対しても定義できる．空間形の例を挙げてみよう．

計量＼断面曲率	$+1$	0	-1
リーマン計量	球面	ユークリッド空間	双曲空間
ローレンツ計量	ド・ジッター空間	ミンコフスキー空間	反ド・ジッター空間

例えば，$\mathbb{R}^n$ 上に符号 $(n,0)$ の計量 $ds^2 = dx_1{}^2 + \cdots + dx_n{}^2$ を与えて $\mathbb{R}^n$ をリーマン多様体とみなすと，$\mathbb{R}^n$ は断面曲率が 0 の空間形となる．さらにこの計量を余次元 1 の単位球面

$$\mathrm{S}^{n-1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = 1\}$$

に制限すると，球面 S^{n-1} は断面曲率が 1 のリーマン多様体の構造をもつ．

さて，本書の前半で取り扱われているリー群 $SU(2)$ は

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} : x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

という行列表示によって，3 次元球面 S^3 と同一視される．従って，$SU(2)$ は

$$\boxed{\text{断面曲率が 1 のリーマン多様体 } \mathrm{S}^3 \text{ (空間形) である}}$$

という微分幾何的な側面をもつことが分かる．

一方，本書の後半で取り扱われるリー群 $SU(1,1)(\simeq SL(2,\mathbb{R}))$ は

$$\begin{aligned} SU(1,1) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 - ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} : x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 - x_4{}^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

という行列表示によって $\mathbb{R}^4$ の超曲面

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 - x_4{}^2 = 1\}$$

として実現される．$\mathbb{R}^4$ 上に符号が $(2,2)$ の擬リーマン計量

$$ds^2 = -{dx_1}^2 - {dx_2}^2 + {dx_3}^2 + {dx_4}^2$$

を考え，それをこの超曲面に制限すると，計量の符号が $(2,1)$ のローレンツ多様体が得られる．この 3 次元の多様体の断面曲率は至る所 -1 であり，ローレンツ幾何における空間形（**反ド・ジッター空間**）となる．3 次元の反ド・ジッター空間は，AdS^3 と表記される．今，見てきたように，リー群 $SU(1,1)$ は

断面曲率が -1 のローレンツ空間形 AdS^3 である

という微分幾何的な側面をもつことが分かる．このようにして，本書で扱われているリー群 $SU(2)$ および $SU(1,1)$ は，それぞれリーマン幾何における正の定曲率空間，ローレンツ幾何における負の定曲率空間である．

さて，フーリエ級数は任意の周期函数（すなわち，円周 S^1 上の任意函数）を三角函数を用いて展開するものである．より一般に n 次元球面 S^n 上の任意函数を特殊函数を用いて展開する公式も，群の表現論が芽生える以前から解析学者によって用いられてきた．これは，球面上の任意函数をラプラシアンの固有函数（球面調和函数）の和によって近似する公式とみなせる．一方，この展開公式は，表現論の観点からは，正則表現 $L^2(\mathrm{S}^n)$ の既約分解に付随した展開定理という見方もできる (第 V 節参照).

一方，本書の定理 17.13 と 17.14 では，$G = SU(1,1)$ の Plancherel 型定理を G 上の任意の L^2 函数 $f(g)$ の展開定理として与えているが，この定理も

- 表現論の観点からは，正則表現 $L^2(G)$ の直積分による既約分解（後述の定理 II.1 参照），
- 微分幾何の観点からは，反ド・ジッター空間 AdS^3 上の任意函数を（双曲型微分作用素である）ラプラシアンの固有函数で展開する定理

という 2 通りの解釈で深化させることが可能である．本書では前者の観点はその一歩手前まで記述されている一方，後者の観点には触れられていない．

次の表は，これらの空間形の幾何と，その上の函数の展開定理をまとめたものである．

幾何 X	断面曲率	函数空間 $L^2(X)$ の展開定理
n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$	0	Parseval の定理
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$	0	Plancherel の定理
3 次元球面 S^3	$+1$	$SU(2)$ の Peter-Weyl の定理
3 次元反ド・ジッター空間 AdS^3	-1	$SU(1,1)$ の Plancherel 型定理

この表では，最初の 3 つがリーマン多様体，最後の 1 つがローレンツ多様体である．これに応じて，そのラプラシアンは楕円型，双曲型の微分作用素となり，固有値問題を考える際の偏微分方程式としての性質は大きく異なる．

より一般に，任意次元の任意符号をもつ擬リーマン多様体に対し，その単連結な定曲率空間上の函数をラプラシアンの固有函数で展開する定理は Gelfand [3], 新谷卓郎，Molchanov, 高橋礼司，Faraut, Strichartz によって確立された．

I.2.　代数的な側面からみた $SU(2)$ と $SL(2,\mathbb{R})$

数学的な概念が定式化されると，次のステップとして，「その最小単位は何か？」ということが基本的な問題の一つとして考えられる．リー群あるいはリー環に対しても「その最小単位は何か？」という観点に立脚して，本書の題材である $SU(2)$ と $SL(2,\mathbb{R})$ というリー群の意味を考えてみよう．

単純リー環　与えられたリー環 $\mathfrak{g}$ を，より簡単ないくつかのリー環に "分解する" という事を考える．$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ が

$$\forall X \in \mathfrak{h},\ \forall Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{h}$$

をみたすとき，$\mathfrak{h}$ を（リー環 $\mathfrak{g}$ の）**イデアル**という．$\mathfrak{h}$ がイデアルならば，

$$\forall X \in \mathfrak{h},\ \forall Y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{h}$$

も成り立つので，イデアルはそれ自身リー環でもある．$\mathfrak{h}$ がイデアルならば商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は自然にリー環となる．まとめると

リー環 $\mathfrak{g}$ にイデアル $\mathfrak{h}$ が存在する $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ も $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ もリー環である

ことがわかる．従って，“最小単位” のリー環を探すためには，非自明なイデアルをもたないリー環を考えればよい．1 次元のリー環はもちろん非自明なイデアルをもたない．非自明なイデアルを持たない 2 次元以上のリー環 $\mathfrak{g}$ を**単純リー環**という．有限次元の単純リー環は約 100 年前に分類された．

定理 I.1（**É. Cartan, 1914**） $\mathbb{R}$ 上の有限次元の単純リー環は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p,q)$, $\mathfrak{su}^*(2n)$, $\mathfrak{so}^*(2n)$, $\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{sp}(p,q)$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ という古典型の 10 系列と 22 個の例外型に分類される．

上記の分類結果から，単純リー環の次元は小さいものから順に

$$3, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 20, 21, 24, \cdots$$

となる．特に，単純リー環の最小次元は 3 であり，それは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ あるいは $\mathfrak{su}(2)$ のいずれかと同型である．

さらに É. Cartan は，単純リー環が，単連結な既約リーマン対称空間と一対一に対応しているということを見抜いた．これは代数的な概念と幾何的な概念の同値性を与える顕著な結果である．特に，単連結な既約リーマン対称空間は定理 I.1 を用いて分類される．この分類理論については [4] が詳しい．

さて，イデアルの定義より，有限次元の任意のリー環に対して，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$$

というイデアルの列で任意の j $(1 \leq j \leq n)$ に対して

$$\mathfrak{g}_{j-1}/\mathfrak{g}_j \text{ は } \mathbb{R} \text{ または単純リー環}$$

となるものが存在する．この意味で，単純リー環と 1 次元の可換なリー環 $\mathbb{R}$ は “最小単位” のリー環とみなせるが，次の少し広い概念も良く用いられる．

簡約リー環 $=\mathbb{R}$ と単純リー環たちの直和と同型なリー環

半単純リー環 = 単純リー環たちの直和と同型なリー環

定義より

単純リー環 ⇒ 半単純リー環 ⇒ 簡約リー環

が成り立つ．簡約リー環は，いろいろな操作で閉じており，単純リー環よりも自然に現れることが多い．例えば特殊直交群 $SO(n)$ のリー環 $\mathfrak{so}(n)$ では，

$n=2$ のとき	$\mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$	(可換なリー環)
$n=4$ のとき	$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$	(2 つのリー環の直和)

となるので，$n=2$ と $n=4$ の場合は単純リー環ではないが，この場合を含めてすべて簡約リー環となっている．$\mathfrak{so}(n)$ の例をまとめると次のようになる．

$n \geqq 2$	$\mathfrak{so}(n)$ は簡約リー環
$n \geqq 3$	$\mathfrak{so}(n)$ は半単純リー環
$n=3$ または $n \geqq 5$	$\mathfrak{so}(n)$ は単純リー環

<u>**最小単位からの構成**</u>　化学では，原子の分類ができても，その「つながり方」を抜きにしては分子の構造が解明されるわけではない．これと同じように，リー環 $\mathfrak{g}$ に対しても，そのイデアル $\mathfrak{h}$ と商リー環 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ からもとのリー環 $\mathfrak{g}$ を復元することは一般にはできない．すなわち，もとのリー環を再構成するためにはその「つながり方」（正確には拡大 (extension)）を理解することが必要である．たとえば，冪零リー環の分類は低次元の場合しか知られていないが，これは「可換なリー環 $\mathbb{R}$ の拡大」を繰り返すことから生じる複雑さに起因する．本稿では，この方向には立ち入らず，単純リー群（あるいは少し一般的に，簡約リー群）の表現論に焦点を当てる．

<u>**リー群**</u>　多様体と群の構造を合わせ持つのがリー群である．リー群の (局所的な）性質は，すべてそのリー環で決定される．対応するリー環がそれぞれ単純リー環，半単純リー環，簡約リー環であるようなリー群をそれぞれ，**単純リー群**，**半単純リー群**，**簡約リー群**という．非自明な連結正規部分群を持たない連結リー群は，1 次元ならば $\mathbb{R}$ または $\mathbb{T}$（トーラス），2 次元以上ならば単純リー

群となる．定理 I.1 の分類に対応して，$SL(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $SU(p,q)$, $\cdots$ などは単純リー群である．簡約リー群は $\mathbb{R}$ および単純リー群の直積に局所同型である．

単純リー群にはコンパクトなものも，コンパクトでないものも存在する．コンパクトな単純リー群は以下の古典型 4 系列

A_n 型のコンパクト単純リー群	$SU(n+1)$	
B_n 型のコンパクト単純リー群	$SO(2n+1)$	
C_n 型のコンパクト単純リー群	$Sp(n)$	
D_n 型のコンパクト単純リー群	$SO(2n)$	$(n \neq 1,2)$

と 5 つの例外型リー群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 のいずれかに局所同型である．本書の前半の題材であるコンパクト群 $SU(2)$ は，この分類の中で A_n, B_n, C_n 型の出発点 $(n=1)$ という役割も担う．まとめると，以下のようになる．

$$\begin{array}{ccccc} SU(2) & \underset{\text{同型}}{\simeq} & Sp(1) & \xrightarrow{\text{二重被覆}} & SO(3) \\ A_1\ \text{型} & & C_1\ \text{型} & & B_1\ \text{型} \end{array}$$

一方，非コンパクトな単純リー群には 10 系列の古典型リー群が含まれる．本書の後半の題材である $SU(1,1)$ はその 10 系列の内，次の 4 系列

特殊実線型群	$SL(n+1,\mathbb{R})$	$n=1,2,\cdots$
不定値特殊ユニタリ群	$SU(p,q)$	$p,q=1,2,\cdots$
実シンプレクティック群	$Sp(n,\mathbb{R})$	$n=1,2,\cdots$
一般ローレンツ群	$SO_0(n+1,1)$	$n=1,2,\cdots$

の出発点 ($n=1$ あるいは $p=q=1$) となっている．すなわち，

$$SL(2,\mathbb{R}) \underset{\text{同型}}{\simeq} SU(1,1) \underset{\text{同型}}{\simeq} Sp(1,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{二重被覆}} SO_0(2,1)$$

という関係がある．ここで $SO_0(n+1,1)$ は $SO(n+1,1)$ の単位元を含む連結成分を表す．

本書の題材である $SU(2)$ および $SL(2,\mathbb{R})$ ($\simeq SU(1,1)$) は，それぞれコンパクトおよび非コンパクトな単純リー群の中で最も次元が低い．従って，その表現論は，簡約リー群の表現論のスタート地点という側面をもつ．しかし，それだけにとどまらず，$SU(2)$ の有限次元表現論や $SL(2,\mathbb{R})$ の無限次元表現論は，異分野の思いがけない所に登場する．その例を述べよう．

- Hodge 理論における Lefschetz 分解 $\cdots$ $SU(2)$ の有限次元表現論の応用
- フーリエ変換の変形理論 [1] $\cdots\cdots\cdots$ $SL(2,\mathbb{R})$ の無限次元表現論の応用

II　根源的なものを求めて—既約表現の分類と既約表現への分解

リー群は，偏微分方程式の解の変換群として，1870 年代にノルウェーの数学者 Sophus Lie (1842–1899）によって生み出された概念である．リー群やその表現論は，解析，幾何，代数 が幾重にも交わりながら，飛躍的な発展を遂げてきた．表現論のさまざまな側面に焦点を当てた大部の専門書も何冊も出版されている．高度に発展した理論をこの短い「解説」で詳しく紹介することはできないが，まず,「既約なものの分類」と「既約なものへの分解」という観点から論点を整理してみよう．この節で論点を整理した上で，第 III–V 節では，$SU(2)$ や $SU(1,1)$ という題材に対して本書が展開している議論が，どのような手法と考え方で，より一般の場合に拡張されるのかを解説する．

II.1.　リー群の表現論の基本課題

数学のそれぞれの分野の対象に何らかの対称性があるとき，その具体的設定を（形式的に）捨象して生まれたのが群や表現論という概念である．従って表現論は具体的設定に依存しない研究が可能であると同時に，逆に具体的な表現の実現を積極的に活用して数学の他分野の手法を取込んで飛躍することも多い．リー群の表現論では，100 年近い歳月に亘って，函数解析，微分方程式，代数幾何，代数解析，微分幾何，複素多様体論，組み合せ論等，様々な数学の分野と結びつき，互いに影響を与えながら発展してきた．また，ひとたび表現

論的な結果が得られれば，異質の対象間に新しい結びつきを予知したり，異なる分野に新しい手法を与えたりすることも期待される．

このように，表現論では常に表現論の外部との接触が重要であり，筆者自身の興味も主にその部分にあるが，それを踏まえた上で表現論内部の中心課題は次の 2 つに大別される：

(1) 既約な表現（の同値類）を分類し，それを理解せよ．

(2) 与えられた表現を既約分解せよ．

(1）には，表現の不変量を発見してその性質を解明することや，既約表現の構成などの問題が含まれる．(1) は第 III 節と IV 節でその一端を紹介する．

(2) における “既約分解” の意味を説明しておこう．完全可約な有限次元表現の場合は有限個の既約表現の直和として表せるので，その表示を**既約分解**という．一方，無限次元表現の場合，可算直和では既約分解を記述できない場合がある．von Neumann はスペクトル分解の考え方をもとに，直和の拡張として**直積分** (direct integral) の概念を導入した．この理論を用いてユニタリ表現の “既約分解” の存在は次の形で定式化される（[16] 参照）．

定理 II.1（Mautner-Teleman） 局所コンパクト群の任意のユニタリ表現は，既約ユニタリ表現のある直積分とユニタリ同値である．

H を G の部分群とし，既約分解を考える 2 つの重要な設定を挙げよう．

(2-a) **誘導表現**：$H \subset G$ を部分群，σ を H の既約表現とすると，誘導表現と呼ばれる G の表現 $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ が定義される．特に，等質空間 G/H の Plancherel 型定理は σ が自明な 1 次元表現 $\mathbf{1}$ の場合の L^2 誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1})$ ($\simeq L^2(G/H)$ 上の正則表現）の既約分解に対応する．

(2-b）**表現の制限**：G の既約表現 π を部分群 H の表現とみなして既約分解する公式を**分岐則**という．テンソル積表現の分解は分岐則の一例である．

表現の制限の研究 (2-b) は，無限次元表現の場合には多くの困難を伴うが，

1990 年代の離散的分岐則の理論 [9] がブレークスルーとなり，最近，急速に発展している．このテーマは本解説では扱わないが，興味のある読者は概説論文 [10, 11] を参照されたい．一方，誘導表現 (2-a) は研究の歴史が長い．その中で本書の主定理とも関連する部分を第 V 節で取り上げることにする．

III　リー群の既約表現の分類理論の手法と発展

リー群の既約ユニタリ表現はどのくらいあるのだろうか？ 本質的には，この問題は単純リー群の既約ユニタリ表現の分類問題に帰着する．この節では，単純リー群の既約表現の分類理論における約 100 年間の進展とその手法，および，現在の未解決問題について簡潔に紹介する．その中で，本書の主テーマの 1 つである，$SU(2)$ および $SL(2,\mathbb{R})$ の既約表現の分類が，どのように位置づけられるかを見ていこう．

III.1.　有限次元の既約表現の分類

連結かつ単連結なコンパクト・リー群 G の既約な有限次元表現の分類は Cartan-Weyl の最高ウェイト理論によって完成した (1925)．一言で書くと，

$$\underset{\text{既約表現の全体}}{\widehat{G}} \simeq \underset{\text{優整形式の集合}}{\Lambda^+} \tag{III.1}$$

という全単射が存在する．(III.1) の左辺は 4 つの見方があるが，その説明のために必要な記号を用意する．$\mathfrak{g}$ を連結なコンパクト・リー群 G のリー環とすると，G を部分群として含む連結な複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ でそのリー環が $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と同型なものが存在する．たとえば G がユニタリ群 $U(n)$ ならば，$G_{\mathbb{C}}$ は複素一般線型群 $GL(n,\mathbb{C})$ である．このとき，次の (III.1)(a)–(III.1)(c) の間に一対一の対応があり（**ユニタリ・トリック**），さらに G が単連結ならば (III.1)(d) との間にも一対一の対応がある．

(III.1)(a)　コンパクト・リー群 G の既約ユニタリ表現

(III.1)(b)　コンパクト・リー群 G の既約な有限次元ユニタリ表現

(III.1)(c)　複素簡約リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の複素解析的な有限次元既約表現

(III.1)(d)　複素簡約リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の有限次元既約表現

従って，(III.1) の左辺に関して，(III.1)(a)–(III.1)(d) のいずれを考えても良い．一方，(III.1) の右辺におけるパラメータ集合 Λ^+ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^r$ のある閉錐 C_+ に含まれる格子点からなる．ここで r は群 G の**階数**と呼ばれる正の整数であり，たとえば $G = SU(n)$ ならば $r = n-1$ である．簡約リー環の用語では，階数 r は $\mathfrak{g}$ の **Cartan 部分代数** ($\mathfrak{g}$ の極大可換部分代数) $\mathfrak{h}$ の次元である．さらに $\mathfrak{h}^\vee$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とするとき，C_+ は dominant Weyl chamber と呼ばれる $\sqrt{-1}\mathfrak{h}^\vee$ の閉錐であり，Λ^+ は**優整形式** (dominant integral weight) からなる C_+ の可算部分集合である．まとめると，以下のようになる．

$$\Lambda^+ \underset{\text{整数条件}}{\subset} C_+ \underset{\text{閉錐}}{\subset} \sqrt{-1}\mathfrak{h}^\vee \simeq \mathbb{R}^r \tag{III.2}$$

さて，本書では定理 3.5 において $SU(2)$ の既約表現のパラメータ付け

$$\widehat{SU(2)} \simeq \mathbb{N} \tag{III.3}$$

が与えられている．上述の一般論 (III.1) を $G = SU(2)$ の場合に適用してみよう．このとき G の階数は 1 であり，(III.2) は

$$\Lambda^+ = \mathbb{N} \underset{\text{整数条件}}{\subset} C_+ = \mathbb{R}_{\geqq 0} \underset{\text{閉錐}}{\subset} \quad \mathbb{R} = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^\vee$$

という形で与えられるので，一般論 (III.1) を $G = SU(2)$ に適用したものが，全単射 (III.3) に他ならない．

コンパクト · リー群 G の既約な有限次元表現全体のパラメータ付け (III.1) は，非コンパクトなリー群の既約表現の分類理論の原型にもなる．そこで全単射 (III.1) における左辺から右辺への写像，およびその逆写像の意味をそれぞれ少し丁寧に見てみることにしよう．

全単射写像 (III.1) において，$\widehat{G}$ (左辺) からパラメータ集合 Λ^+ (右辺) への写像は，表現の**不変量を与える写像** であり

各既約表現 π に対してその最高ウェイト $\lambda \in \Lambda^+$ を定める

ことによって得られる．G がコンパクト・リー群の場合，この対応は初等的に定義される．すなわち，π の表現空間を Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の作用で同時固有空間に分解したときの“最大固有値”を λ（**最高ウェイト**）として定める．本書の定理 3.5 では，$G = SU(2)$ の特殊性は使われておらず，一般の連結なコンパクト・リー群に対しても同じアイディアが適用可能である．

逆に，全単射 (III.1) において右辺から左辺への写像は，

分類パラメータ $\lambda \in \Lambda^+$ に対して既約表現 $\pi \in \widehat{G}$ を構成する

ことに対応する．**表現の構成問題** の答えは一通りではない．むしろ，数学のさまざまな分野を背景とした構成法が考えられるのが醍醐味ともいえよう．

本書では $G = SU(2)$ の場合に分類パラメータ $n \in \mathbb{N}$ $(= \Lambda^+)$ に対して n 次斉次の 2 変数多項式のなすベクトル空間上に表現を構成し，$SU(2)$ の特殊性に依存した方法で既約性を証明している．

一般の連結なコンパクト・リー群 G の場合に，最高ウェイト $\lambda \in \Lambda^+$ から既約な有限次元表現 π を構成する代表的な方法としては，

- Verma 加群と呼ばれる，ある普遍性をもつ無限次元表現の商として既約な有限次元表現を得る代数的方法，
- 旗多様体と呼ばれるコンパクトな複素多様体上の正則直線束の切断の空間に既約な有限次元表現を構成する Borel-Weil の幾何的構成法

などが知られている．前者はたとえば [6], 後者は [12, 14] を参照されたい．

III.2.　単純リー群の既約表現の分類

$SL(2, \mathbb{R})$ の既約表現は，ユニタリ性を仮定しない場合でも，その大部分は無限次元である．より一般に，非コンパクトな単純リー群の表現論では無限次元の場合に焦点を当てる必要がある．そして，その既約表現の分類理論は

- 表現空間となるベクトル空間の位相を類別しない
- ユニタリ表現の構造をもつかどうかは問わない
- 認容 (admissible) というおだやかな仮定を置く

という立場で 1970 年代から 1980 年代にかけて一応の完成をみた．現在，以

下のように，大別して 3 種類の方法が知られている．既約表現の分類という 1 つの目標に向かって，解析，代数，幾何のそれぞれの手法が有効であり，数学の異分野がダイナミックに交差している様子が感じられることと思う．

(1) (解析的手法による Langlands の分類理論 [13])．群 G の表現を (無限サイズの) 行列群への準同型写像とみなすと，その行列成分（**表現の行列要素**）は G 上の函数とみなせる．既約表現の行列要素が非コンパクトな群 G の無限遠でどのような漸近挙動をとるかという解析的性質は，既約表現の不変量となる．この不変量だけでは類別できない部分 (**緩増加表現**) に関しては，$SL(2,\mathbb{R})$ の既約緩増加表現の分類と R 群と呼ばれる有限群の精緻な構造を用いて記述でき (Knapp-Zuckerman)，両者を合わせて分類が完成した．

(2) (代数的手法による Vogan の分類理論 [17])．単純リー群 G の（無限次元の）既約表現を群 G の極大コンパクト群 K で分解し，その中で "パラメータが最小のもの" (**最小 K タイプ**) を主要な分類パラメータとする．さらに，最高ウェイト理論のコホモロジー化として，既約表現を係数とする，ある冪零リー環のコホモロジーから別の分類パラメータを引き出す．この分類法は (1) と異なり代数的手法のみを用いるものである．

(3) (幾何的データを用いた分類理論)．リー群の表現を，無限小の性質を司るリー環の作用と大域的な性質を司る極大コンパクト部分群 K の作用に分ける．前者の作用は微分作用素のなす非可換環の加群 (**$\mathcal{D}$-加群**) を経由させて捉えるという Beilinson-Bernstein, Brylinski-柏原正樹のアイディアを用い，後者の大域的な性質を（複素）旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の幾何と結びつけ，$K_{\mathbb{C}}$ 軌道を既約表現の主要な分類パラメータとする．

注意 分岐則の立場から見ると，コンパクト・リー群の有限次元既約表現に対する Cartan-Weyl の最高ウェイト理論，簡約リー群の既約認容表現に関する Vogan の分類理論では，それぞれ極大トーラス，極大コンパクト部分群に既約表現を制限したときの（離散的な）分岐則の "端" が分類の不変量として用いられるのである ([10])．

III.3.　単純リー群の既約ユニタリ表現の分類

ヒルベルト空間上に定義された表現は，群 G の各元がユニタリ変換として作用するとき，**ユニタリ表現**という．表現を「最小単位のものに分解すること」で理解しようという立場において，ユニタリ表現はその強みを発揮する (定理 II.1)．この場合の「最小単位」にあたるものは**既約ユニタリ表現**である．群 G の既約ユニタリ表現の同値類の集合を G の**ユニタリ双対** (unitary dual) といい，$\widehat{G}$ と表記する．次の定理は，リー群のユニタリ双対 $\widehat{G}$ の分類問題において，単純リー群の場合が基本的に重要な問題であることを示唆している．

定理 III.1（Duflo）　代数的に定義されたリー群の既約ユニタリ表現の分類は単純リー群のユニタリ双対 $\widehat{G}$ の分類に帰着する．

単純リー群 G の既約ユニタリ表現の分類理論は 1940 年代に V. Bargmann (米国) と Gelfand 学派 (ロシア) の研究に始まり，現在も進行中である．試金石となる特殊線型群 $SL(n,\mathbb{R})$ や $SL(n,\mathbb{C})$ の場合でさえ，そのユニタリ双対の分類には，以下のように約 40 年の歳月が必要であった．

n	$SL(n,\mathbb{R})$	$SL(n,\mathbb{C})$
2	Bargmann (1947)	Gelfand-Naimark (1947)
3	Vakhutinski (1968)	土川眞夫 (1968)
4	Speh (1981)	Duflo (1977)

一般の n に対する $SL(n,K)$ ($K=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$) のユニタリ双対は Vogan (1986) によって，また古典型複素単純リー群 $SL(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{C})$ のユニタリ双対は Barbasch (1989) によって，決定された．一方，$SO(p,q)$ のユニタリ双対は $q=1$ の場合は平井武 (1962) によって分類されたが，p, q が一般の場合は未解決である．その他の多くの単純リー群に対してユニタリ双対の分類問題は，現在においても未解決である．前節 III.2 で解説したように，単純リー群の既約表現は（表現空間となる無限次元ベクトル空間の位相を類別しない形で）その分類理論が知られている．しかし，その中で，どれがユニタリ表現の

構造をもちうるかについては，十分に解明されたとは言い難いのである．

さて，本書の主テーマの 1 つは $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現の分類である．リー群 $SU(1,1)$ と $SL(2,\mathbb{R})$ は同型なので，本書の定理 16.4 は V. Bargmann による $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ双対の分類と同値である．本書では，少ないページ数で分類結果を紹介するという立場から，いわば天下り的に $SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現の系列が与えられている．読者の中には，「なぜ」そして「どのようにして」これらの表現が見つかったのかについて興味を抱かれる方もおられることと思う．次節では，Bargmann の論文が書かれた時点にはまだ誕生していなかった「軌道法」や「幾何的量子化」という別の観点を紹介する．

IV　軌道法とシンプレクティック多様体の幾何学的量子化

前節 III.3 で議論したリー群 G のユニタリ双対

$$\widehat{G} = G \text{ の既約ユニタリ表現の同値類の全体}$$

とは，一体，どのような集合なのだろうか？ この節では，G を（単純リー群とは限定せず）一般のリー群とし，ユニタリ双対 $\widehat{G}$ を “近似的に” 把握する考え方である “orbit philosophy” を解説しよう．

IV.1.　余随伴表現と軌道法

リー群 G はそのリー環 $\mathfrak{g}$ に随伴表現 $\mathrm{Ad}: G \to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ を通じて作用する．$\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ 上に定義される反傾表現

$$\mathrm{Ad}^{\vee}: G \to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\vee})$$

を**余随伴表現**という．$\mathfrak{g}^{\vee}$ の同値関係を

$$\begin{aligned} \lambda \text{ と } \lambda' \text{ が同値} &\Leftrightarrow \lambda = \mathrm{Ad}^{\vee}(g)\lambda' \text{ となる } g \in G \text{ が存在する} \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ と } \lambda' \text{ が同一の余随伴軌道に含まれる} \end{aligned}$$

と定めて $\mathfrak{g}^{\vee}$ を類別した空間（**余随伴軌道の空間**）を $\mathfrak{g}^{\vee}/\mathrm{Ad}^{\vee}(G)$ と表記する．

さて，G が $SL(n,\mathbb{R})$ のように連結な非コンパクト単純リー群ならば，その既約ユニタリ表現は自明な 1 次元表現を除いてすべて無限次元である．さらに互いに同値でない既約ユニタリ表現は連続濃度ある．このように，リー群 G のユニタリ双対 $\widehat{G}$ はある意味で “巨大な” 対象といえるものであるが，それがたった 1 つの有限次元表現である余随伴表現 $(\mathrm{Ad}^\vee, \mathfrak{g}^\vee)$ によって統制できるというのが Kirillov-Kostant-Duflo による**軌道法** (orbit method) の考え方である．すなわち，軌道法の理想的な姿として，以下の全単射が “自然な形で” 存在することを期待するのである:

$$\underset{\text{ユニタリ双対}}{\widehat{G}} \qquad \simeq \qquad \underset{\text{余随伴軌道の空間}}{\mathfrak{g}^\vee / \mathrm{Ad}^\vee(G)} \tag{IV.1}$$

軌道法は素朴な形で成り立つ場合と修正が必要な場合があり，また，$\widehat{G}$ と $\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)$ がかなり乖離する場合もある．これらの典型例を挙げてみよう．

G が単連結な冪零リー群の場合は軌道法は理想的な形で成り立つ．すなわち，$\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)$ とユニタリ双対 $\widehat{G}$ の間に自然な全単射が存在する (Kirillov, 1962)．さらに，$\widehat{G}$ の Fell 位相と呼ばれる位相構造や表現の誘導 · 制限に関する性質も全単射 (IV.1) の右辺から読み取ることができる．

G が単連結なコンパクト · リー群の場合には，軌道法は (IV.1) に少し修正を施すと成り立つ．実際，第 III.1 節の記号を用いると，カルタン分解より

$$\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G) \simeq C_+ \tag{IV.2}$$

という全単射が存在する．Cartan-Weyl の同型と (III.1) と合わせると

$$\underset{\text{既約表現}}{\widehat{G}} \simeq \underset{\text{優整形式}}{\Lambda^+} \overset{\text{整数条件}}{\subset} C_+ \simeq \underset{\text{余随伴軌道}}{\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)}$$

と表される．従って，余随伴軌道の空間 $\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)$ のある種の整数条件を課して定まる離散部分集合と $\widehat{G}$ との間に一対一対応が得られる．このようにして，Cartan-Weyl の最高ウェイト理論を軌道法の枠組に取込むことができる．

一方，G が非コンパクトな単純リー群の場合は，$\widehat{G}$ に関する従来の知見を総合すると，$\widehat{G}$ から $\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)$ への “自然な単射” の存在は望めない．その

一方で，(IV.1) の両辺の "ある程度大きな部分集合" の間に対応を発見しようという試みから多くの理論が生まれており，軌道法は啓発的な役割を果たしてきた．以下の第 IV.4 節では，$G=SL(2,\mathbb{R})$ の場合に，(IV.1) の左辺（既約ユニタリ表現）と右辺（余随伴軌道）とを比較して，この話題に触れる．

IV.2.　簡約リー群の余随伴軌道

群 G が簡約リー群の場合は，リー環 $\mathfrak{g}$ に非退化かつ G 不変な二次形式が存在するため，随伴表現と余随伴表現は同値となり，次の全単射が存在する:

$$\underset{\text{余随伴軌道の空間}}{\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)} \quad \simeq \quad \underset{\text{随伴軌道の空間}}{\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(G)} \tag{IV.3}$$

さて，$G=GL(n,\mathbb{C})$ の場合，そのリー環 $\mathfrak{g}$ と n 次の正方行列全体 $M(n,\mathbb{C})$ が同一視され，随伴表現は $g\in GL(n,\mathbb{C})$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)\colon M(n,\mathbb{C})\to M(n,\mathbb{C}),\quad X\mapsto gXg^{-1}$$

で与えられる．従って，随伴軌道の代表元はジョルダン標準形によって与えられる．G が 一般の簡約リー群の場合にも，ジョルダン標準形を拡張した理論があり，特に，任意の元 $X\in\mathfrak{g}$ は互いに可換な半単純元 X_s と冪零元 X_n の和

$$X=X_s+X_n$$

に一意的に分解される．議論を簡単にするため，半単純元からなる集合

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}:=\{X\in\mathfrak{g}:X_n=0\}$$

に注目しよう．$G=GL(n,\mathbb{C})$ の場合は，$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ は対角化可能な n 次複素正方行列のなす集合に他ならない．一般に $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な稠密部分集合となる．$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ の元を通る随伴軌道を**半単純軌道**という．商空間に移行すると，半単純軌道の空間 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}/\mathrm{Ad}(G)$ は随伴軌道の空間 $\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(G)$ において稠密となる．複素行列の対角化，および実行列の標準化の理論より，$G=GL(n,\mathbb{C}), GL(n,\mathbb{R})$ の場合の半単純軌道の代表系の取り方は次の表で与えられる．

G	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}/\mathrm{Ad}(G)$ の代表系
$GL(n,\mathbb{C})$	$M(n,\mathbb{C})$	複素対角行列
$GL(n,\mathbb{R})$	$M(n,\mathbb{R})$	$h_k(\theta,\lambda)$ の形の行列 $(0 \leqq 2k \leqq n)$

ここで $h_k(\theta,\lambda)$ は $0 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2}$ に応じて次のタイプの行列を表す．

$$h_k(\theta,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\theta_k & -\sin\theta_k & & & \\ & & & \sin\theta_k & \cos\theta_k & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_{n-2k} \end{pmatrix}$$

$G = GL(n,\mathbb{R})$ の場合には，実固有値の個数に応じて半単純元の標準形のタイプが変わることに注意しよう．同様に，一般の簡約リー群 G の半単純軌道の空間 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}/\mathrm{Ad}(G)$ も有限個のタイプに分かれ，その記述は Cartan 部分代数を用いて行うことができる．簡約リー環の Cartan 部分代数の分類問題は，本書の著者である杉浦光夫氏によって証明された ([15])．

軌道法の立場では，適当な仮定の下で，半単純軌道と既約なユニタリ表現との対応は，現在かなり明快に解明されている ([8])．すなわち，上記の Cartan 部分代数のタイプに応じて放物型誘導表現とコホモロジー的放物型誘導表現の構成法 ([17]) を組合わせるのである．第 IV.5 節では，$G = SU(1,1)$ の場合に本書の第 7 章の結果と比較しながら，この対応を例示する．

IV.3.　$SU(2)$ の既約表現と余随伴軌道

3 次元リー群の例に戻り，$G = SU(2)$ の随伴表現を視覚的にとらえてみよう．$SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ を行列表示し，

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} iz & -x+iy \\ x+iy & -iz \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

と表すことによって $\mathbb{R}^3$ と同一視する．行列式の性質から $\det(A)=\det(gAg^{-1})$ が成り立つので，$\det(A)=x^2+y^2+z^2$ は $SU(2)$ の随伴表現

$$\mathrm{Ad}\colon SU(2)\to GL(3,\mathbb{R})\ \simeq GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

で不変である．実際，リー群 $G=SU(2)$ の任意の（余）随伴軌道は, 適当な $r\geqq 0$ に対する半径 r の球面

$$M_r:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=r^2\}$$

と同一視される (図 IV.1(a) 参照)．従って，（余）随伴軌道の空間は

$$\mathfrak{g}^\vee/\,\mathrm{Ad}^\vee(G)\simeq\mathfrak{g}/\,\mathrm{Ad}(G)\simeq\{r\in\mathbb{R} : r\geqq 0\}$$

と記述される．$G=SU(2)$ のユニタリ双対の記述 (III.3) と比較すると，半径 r が整数の球面 M_r (= 余随伴軌道) と，$\widehat{G}$ の元とが一対一に対応していることが分かり，軌道法が（少し修正を施した形で）成り立つ例となっている．

$G=SU(2)$の余随伴軌道

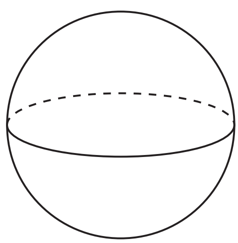


図 IV.1(a)

$G=SU(1,1)$の余随伴軌道

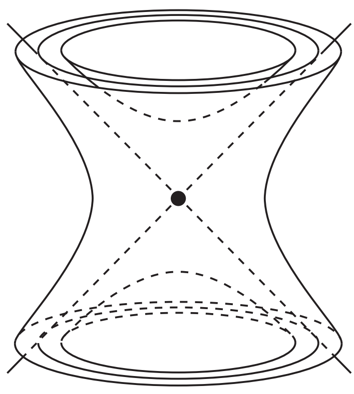


図 IV.1(b)

IV.4.　$SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現と余随伴軌道

次に非コンパクトな 3 次元リー群 $G = SU(1,1)$ の場合に目で見える形で随伴軌道をすべて求めよう．まず，$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,1)$ に次の座標を入れる:

$$\mathfrak{su}(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} iz & x+iy \\ x-iy & -iz \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^3.$$

第 IV.3 節の $SU(2)$ の場合と同様に，リー群 $SU(1,1)$ の随伴表現 $A \mapsto gAg^{-1}$ は行列式を保つ．$\det(A) = z^2 - x^2 - y^2$ の値に応じて $\mathfrak{su}(1,1) \simeq \mathbb{R}^3$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な部分集合を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{ir} &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -r^2\} \quad (r > 0), \\
\mathcal{O}_0 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}, \\
\mathcal{O}_r &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = r^2\} \qquad (r > 0)
\end{aligned}$$

$\mathcal{O}_{ir}$ は二葉双曲面，$\mathcal{O}_r$ は一葉双曲面であり，錐 $\mathcal{O}_0$ は（次元は異なるが）4 次元時空に対する相対性理論の用語にちなんで，光錐 (light cone) という．光錐 $\mathcal{O}_0$ は $z > 0$, $z = 0$, $z < 0$ の部分に分けて

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_0^+ \cup \{0\} \cup \mathcal{O}_0^-$$

と表し，二葉双曲面 $\mathcal{O}_{ir}$ は $z > 0$, $z < 0$ に対応する連結成分に分けて，

$$\mathcal{O}_{ir} = \mathcal{O}_{ir}^+ \cup \mathcal{O}_{ir}^-$$

と書く．このとき，$SU(1,1)$ の（余）随伴軌道は以下のように分類される．

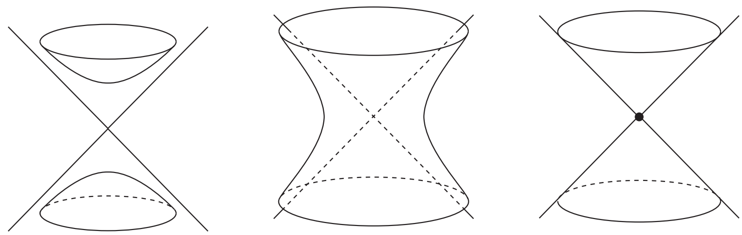
定理 IV.1　$SU(1,1)$ の随伴軌道は次のいずれかと一致する．

$$\mathcal{O}_{ir}^{\pm}\ (r > 0), \quad \mathcal{O}_0^{\pm}, \quad \{0\}, \quad \mathcal{O}_r\ (r > 0) \tag{IV.4}$$

半単純元の空間は以下のように分けられる．

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} = \Big(\bigcup_{r>0} \mathcal{O}_{ir}\Big) \coprod \Big(\bigcup_{r>0} \mathcal{O}_r\Big) \coprod \{0\} = \mathfrak{g} \setminus (\mathcal{O}_0^+ \cup \mathcal{O}_0^-)$$

楕円軌道　　双曲軌道　　冪零軌道



$\mathcal{O}_{ir} = \mathcal{O}_{ir}^{+} \cup \mathcal{O}_{ir}^{-}\ (r > 0)$　　$\mathcal{O}_r\ (r > 0)$　　$\mathcal{O}_0^{\pm}$

図 IV.2 $SU(1,1)$ の (余) 随伴軌道のタイプ

なお $\mathcal{O}_{ir}$, $\mathcal{O}_r$ に属する行列の固有値はそれぞれ，純虚数 $\pm ir$，実数 $\pm r$ となる．これに対応して $\mathcal{O}_{ir}^{\pm}$ や $\mathcal{O}_r$ は**楕円軌道**，**双曲軌道**と呼ばれる．一方，$\mathcal{O}_0^{\pm}$ の元は冪零行列であることから随伴軌道 $\mathcal{O}_0^{\pm}$ を**冪零軌道**という．

上述の（余）随伴軌道の分類（定理 IV.1）と，$SU(1,1)$ のユニタリ双対の分類（本書の定理 16.4）を比較してみよう．以下では，$SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現の記号は本文中のものを用いる．

余随伴軌道	既約ユニタリ表現		
双曲軌道 $\mathcal{O}_r \rightsquigarrow$	$V^{0,\frac{1}{2}+ir}$	(球主系列ユニタリ表現)	(IV.5)
楕円軌道 $\mathcal{O}_{in}^{+} \rightsquigarrow$	U^{n}	(正則離散系列表現)	(IV.6)
楕円軌道 $\mathcal{O}_{in}^{-} \rightsquigarrow$	U^{-n}	(反正則離散系列表現)	
冪零軌道 $\mathcal{O}_0^{+} \rightsquigarrow$	$U^{\frac{1}{2}}$	(ハーディ空間上のユニタリ表現)	
冪零軌道 $\mathcal{O}_0^{-} \rightsquigarrow$	$U^{-\frac{1}{2}}$		
$\{0\} \rightsquigarrow$	I	(1 次元の自明表現)	

この対応は，$\widehat{G}$ と $\mathfrak{g}^{\vee}/\mathrm{Ad}^{\vee}(G)$ の全単射を与えるものではない．例えば，

補系列表現 V^σ $(\dfrac{1}{2} < \sigma < 1)$ が上の対応で欠けていることに注意しよう．また，（本書で "第 2 連続主系列" と呼称されている）既約ユニタリ表現 $V^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+ir}$ $(r > 0)$ も上の対応では省かれている．とはいえ，上述の対応は $G = SL(2, \mathbb{R})$ の場合においても，ユニタリ双対 $\widehat{G}$ と余随伴軌道 $\mathfrak{g}^\vee/\mathrm{Ad}^\vee(G)$ の間には偶然とは言えない密接な関係があることを示している．

IV.5.　余随伴軌道の幾何的量子化

ここまでは軌道法で期待される全単射対応 (IV.1) を単に集合論的な一対一対応として見て来た．次に，軌道法をシンプレクティック多様体の**幾何的量子化**という立場から解釈してみよう．シンプレクティック多様体は余接空間を一般化した概念であり，各点で非退化な 2 次の閉微分形式 ω をもつ多様体のことである．物理学における

$$\text{古典力学} \rightsquigarrow \text{量子力学}$$

という「量子化」と呼ばれる対応に倣って

$$\text{シンプレクティック多様体 } M \rightsquigarrow \text{ヒルベルト空間 } \mathcal{H}$$

という対応を幾何的量子化 (geometric quantization) と呼ぶことにする．この対応が自然に定義できるならば，

$$\begin{aligned} \text{群 } G \text{ の } M \text{ への自己同型作用} &\rightsquigarrow \text{群 } G \text{ の } \mathcal{H} \text{ 上のユニタリ表現} \\ M \text{ への作用が推移的} &\rightsquigarrow \mathcal{H} \text{ 上の表現は既約} \end{aligned} \tag{IV.7}$$

という対応が成り立つことも期待される．

リー群 G を与えたとき，G が自己同型として推移的に作用するシンプレクティック多様体 (M, ω) の典型的な例は以下の定理で与えられる．

定理 IV.2（Kirillov-Kostant-Souriau）　リー群の任意の余随伴軌道はシンプレクティック多様体の構造をもつ．

実際，リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とし，その双対空間 $\mathfrak{g}^\vee$ の点 λ を 1 つ選ぶと，λ を通る余随伴軌道は $\mathfrak{g}^\vee$ の部分多様体であり，等質空間として

$$M := \mathrm{Ad}^\vee(G)\lambda \simeq G/G_\lambda$$

と表される．ここで，G_λ は λ における固定部分群であり，そのリー環は

$$\mathfrak{g}_\lambda := \{X \in \mathfrak{g} : \lambda([X,Y]) = 0 \quad (\forall Y \in \mathfrak{g})\}$$

で与えられる．M の点 λ における接空間 $T_\lambda M$ は商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda$ と同一視されることに注意しよう．歪対称な双線型形式

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \qquad (X,Y) \mapsto \lambda([X,Y])$$

は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda$ 上に非退化な歪対称双線型形式 ω_0 を誘導するので，この ω_0 を G で移動させることによって，余随伴軌道 M に 2 次の閉微分形式 ω が定義され，(M,ω) はシンプレクティック多様体となる．

従って (IV.7) が成り立つならば，余随伴軌道から既約ユニタリ表現を構成することができ，軌道法 (IV.1) の右辺から左辺への対応が得られることになる．

そこで，軌道法の観点に立って，余随伴軌道のシンプレクティック構造が既約ユニタリ表現の構成にどのように関与しうるかを，本書で扱われている $G = SU(1,1)$ の既約ユニタリ表現で例示しながら説明してみよう．

まず $G = SU(1,1)$ においては，

$$\text{双曲軌道}\ \mathcal{O}_r \rightsquigarrow \text{球主系列表現}\ V^{0,\frac{1}{2}+ir}$$

の対応 (IV.5) を考える．ここで $V^{0,\frac{1}{2}+ir}$ は本書では “天下り的に” 円周 S 上の函数空間に実現された既約ユニタリ表現である．さて，次頁の図 IV.3 左で描かれているように $G = SU(1,1)$ の双曲軌道 $\mathcal{O}_r$ は

$$\text{直線}\quad \ell_r = \{(t,r,-t) : t \in \mathbb{R}\}$$

を z 軸中心に回転させたときの軌跡として得られる曲面（線織面）の構造をもっている．直線 ℓ_r および，それを回転させて得られる直線は $\mathcal{O}_r$ のラグラ

ンジュ部分多様体であり，双曲軌道 $\mathcal{O}_r$ に葉層構造を与えている．さらに，これらの直線をそれぞれ 1 点につぶすと円周 S が得られる（図 IV.3）．すなわち，主系列ユニタリ表現の構成において，その舞台となる多様体 S はシンプレクティック幾何の観点からは余随伴軌道のラグランジュ葉層の商として得られる多様体であり，簡約リー群の構造論の観点からは放物型部分群による G の商として得られる実旗多様体となっている．同様の構造は，任意の簡約リー群の双曲軌道に存在し，簡約リー群の表現論における放物型誘導表現は，軌道法の観点からは，実偏極による双曲軌道の幾何的量子化として解釈できる．

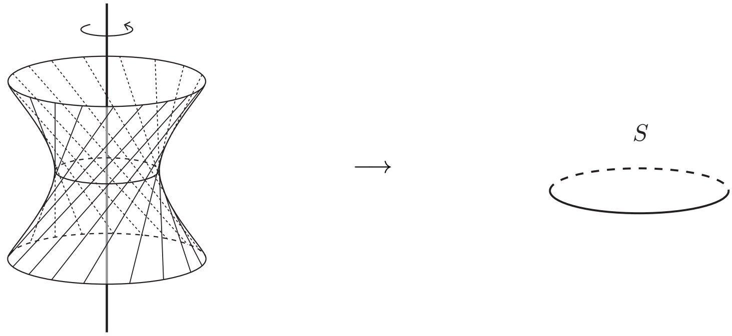


図 IV.3 双曲軌道の線織面としての表示とラグランジュ葉層構造

次に $G = SU(1,1)$ において

$$\text{楕円軌道 } \mathcal{O}^+_{in} \rightsquigarrow \text{ 離散系列表現 } U^n$$

の対応 (IV.6) を考える．ここで U^n は本書では “天下り的に” 単位円板 $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ 上の正則函数の空間上に定義された既約ユニタリ表現である．さて，楕円軌道 $\mathcal{O}^+_{ir}$ $(r > 0)$ は双曲軌道の場合と異なり，群 G の作用と適合するラグランジュ葉層構造をもたないが，そのかわりに群 G が双正則に作用するような複素多様体の構造をもつ．実際，以下の全単射写像

$$D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{ir}^{+}, \quad \zeta \mapsto \frac{ir}{1-|\zeta|^2}\begin{pmatrix} 1+|\zeta|^2 & -2\zeta \\ 2\overline{\zeta} & -1-|\zeta|^2 \end{pmatrix} \tag{IV.8}$$

によって楕円軌道 $\mathcal{O}_{ir}^{+}$ と単位円板 D を $SU(1,1)$ の等質空間として同一視することができる．全単射 (IV.8) の左辺 D は複素多様体，右辺 $\mathcal{O}_{ir}^{+}$ はシンプレクティック多様体の構造をもち，全単射 (IV.8) を通じてこれらの性質が共有される．さらに，(IV.8) の同一視の下で D 上のポアンカレ計量を実部，$\mathcal{O}_{ir}^{+}$ 上のシンプレクティック形式を虚部とする Kähler 構造が $\mathcal{O}_{ir}^{+} \simeq D$ 上に定まる．このようにして，r が自然数 n のとき，$G = SU(1,1)$ の正則離散系列表現 U^n の構成の舞台となる多様体 $D \simeq \mathcal{O}_{in}^{+}$ (楕円軌道) は，シンプレクティック幾何の観点からは G 不変な Kähler 構造をもつ複素多様体であり，正則離散系列表現 U^n は $\mathcal{O}_{in}^{+}$ の複素偏極による幾何的量子化とみなせる．任意の簡約リー群 G の楕円軌道にも G が双正則に作用するような複素多様体の構造と G 不変な（正定値とは限らない）Kähler 構造が存在する．その幾何的量子化には，一般には高次のコホモロジーを必要とするが，ここでは深入りしない．

ここで例示した幾何的量子化の考え方は一般の簡約リー群に拡張することができ，かなり理想的な形で半単純軌道の幾何学的量子化の理論が構成される．正確に記述するためには多くの準備が必要であり，さらに詳しいことに興味のある読者はその一般理論をまとめた [8] を参照されたい．

一方，冪零軌道の幾何的量子化に関しては多くの基本問題が未解決である．最近の進展の 1 つは極小冪零軌道の幾何的量子化の構成 ([5]) であり，その副産物として補系列表現を軌道法の立場で構成する新しい観点が提示された．

V　函数の展開定理と正則表現 $L^2(X)$ の既約分解

本書の後半で扱われた 2 大テーマ

- $SL(2,\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の分類
- $SL(2,\mathbb{R})$ の Plancherel 型定理

のうち，前者については，$SL(2,\mathbb{R})$ を一般のリー群，特に単純リー群に拡張し

た場合の話題を第 III 節と第 IV 節で紹介した．この節では後者の Plancherel 型定理に関して，どのような考え方で一般化され，そして現在，何が解明されているかについて手短かに紹介する．

V.1.　函数の展開定理

多様体 X が与えられたとき，X に “内在する良い函数たち” を定義し，それらを用いて X 上の任意函数を展開するという問題を考える．たとえば，X が（擬）リーマン多様体ならば，

$$\text{内在する良い函数} = \text{ラプラシアン } \Delta \text{ の固有函数}$$

と考えるのである．この観点からは，$SL(2,\mathbb{R})$ $(\simeq SU(1,1))$ の Plancherel 型定理（第 8 章）は「3 次元反ド · ジッター空間 AdS^3 上のラプラシアンの固有函数によって任意の函数を展開する公式」と本質的に同等となる．

なお，本書ではトーラス $\mathbb{T}$ の Parseval の公式は Fourier 級数論 (第 1 章) として，また $SL(2,\mathbb{R})$ の Plancherel 公式は主テーマとして第 8 章で与えられているが，コンパクト群 $SU(2)$ に対する Parseval-Plancherel 型の公式は明示的には記述されていない．この公式は Peter-Weyl の定理 (定理 1.7) と $SU(2)$ の既約ユニタリ表現（の同値類）が

$$U^n\colon SU(2) \to GL_{\mathbb{C}}(V^n)\ (\simeq GL(n+1,\mathbb{C}))$$

$n=0,1,2,\cdots$ で尽くされること (定理 3.5) から導かれる．得られた公式を $SL(2,\mathbb{R})$ に対する本書の記法に沿った形で以下のように補っておく．

定理 V.1（$SU(2)$ の **Parseval-Plancherel** 公式）　$G=SU(2)$ とする．任意の $f \in C^\infty(G)$ に対して

$$\widehat{f}(n) = \int_G f(g) U^n_{g^{-1}} dg \in \mathrm{End}(V^n)\ (\simeq M(n+1,\mathbb{C}))$$

とおけば，

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|\widehat{f}(n)\|_2^2$$

$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{Trace}(\widehat{f}(n)U_g^n) \tag{V.1}$$

が成り立つ．ここで $\widehat{f}(n)$ の Hilbert-Schmidt ノルムを $\|\widehat{f}(n)\|_2$ とおいた．

微分幾何の立場から定理 V.1 を解釈してみよう．任意の自然数 n と任意の $A \in \mathrm{End}(V^n)$ に対して $h_A(g) := \mathrm{Trace}(AU_g^n)$ とおくと，$h_A \in C^\infty(G)$ は，

$$\Delta h_A = n(n+2)h_A$$

を満たす．ここで Δ は $SU(2)$ を S^3 と同一視したときの（第 I.1 節参照）ラプラシアンである．従って，展開公式 (V.1) は「3 次元球面 S^3 上のラプラシアン Δ の固有函数によって任意函数を展開する公式」と解釈することができる．

さて，コンパクト群 $SU(2)$ に対する上述の定理 V.1 と非コンパクト群 $SL(2,\mathbb{R})$ ($\simeq SU(1,1)$) の Plancherel 公式（定理 17.14）を比較してみよう．後者の公式では，右辺の第一項と第二項は連続パラメータ ν, 右辺の第三項は離散パラメータ p をもつ展開式となっており，この第三項はコンパクト群 $SU(2)$ の定理 V.1 と良く似た特徴をもつ．より一般に，Harish-Chandra による簡約リー群の Plancherel 型定理においても，コンパクト群の Peter-Weyl の定理 (定理 1.7: 離散的分解) とユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の Plancherel 定理 (フーリエ変換: 連続パラメータによる展開) の両方の要素が現れる．

V.2.　表現論の観点からみた $L^2(X)$

多様体 X 上の任意函数を，“内在する良い函数” で展開するためのもう 1 つの観点は，第 II.1 節で述べた表現論の基本課題 (2-a) と密接に関連している．すなわち，群 G が多様体 X に作用していると，G は X 上の函数空間にも自然に作用する．特に X 上に群 G で不変な測度が存在するならば，G はヒルベルト空間 $L^2(X)$ にユニタリ表現として作用する．このユニタリ表現 $L^2(X)$ の既約分解を与えるのが **Plancherel 型定理**であり，そこでは，X に “内在する良い函数たち” は各既約表現を用いて定義される．

G を簡約リー群とするとき，正則表現 $L^2(X)$ が G のユニタリ表現としてどこまで解明されているかについて，その発展の例を挙げる．

$L^2(G)$ の Plancherel 型定理: $X = G$ (群多様体)

Peter-Weyl (1927)	G はコンパクト群
Gelfand 学派，Harish-Chandra (1950 年代)	G は複素半単純リー群
Harish-Chandra (1976)	G は半単純リー群

$L^2(G/H)$ の Plancherel 型定理: $X = G/H$ (対称空間)

大島利雄 (未発表)，Delorme (1996)	G/H は半単純対称空間

$L^2(X)$ の緩増加性の判定法

Benoist-小林俊行 (2017)	X は代数多様体

群多様体や擬リーマン空間形 (第 I.1 節) は対称空間の典型例である．群 G の作用で不変な X 上の微分作用素全体を $\mathbb{D}_G(X)$ とおく．G が X の等長変換群ならば，ラプラシアンは $\mathbb{D}_G(X)$ の元であるが，それとは代数的に独立な高階の偏微分作用素も $\mathbb{D}_G(X)$ に含まれることもある．X が対称空間の場合には，不変微分作用素環 $\mathbb{D}_G(X)$ は可換となり，正則表現 $L^2(X)$ の既約分解 (Plancherel 型定理) と $\mathbb{D}_G(X)$ の同時固有函数による任意函数の展開定理とは，ほぼ同値な問題となる．この観点は，群多様体 $SU(1,1)$ の Plancherel 型定理に対する本書の証明（第 8 章）では触れられていないが，大島利雄氏による Plancherel 型定理の証明では本質的な役割を果たしている．

さて，対称空間（あるいは，やや広いクラスである球等質空間）の枠組を超えた一般の等質空間 X に対しては，不変微分作用素環 $\mathbb{D}_G(X)$ は可換とはならず，同時固有函数によって任意函数を展開することはできない．このような一般の等質空間 X に対しては，正則表現 $L^2(X)$ の Plancherel 型定理は現在においても殆ど知られていない．

このような広いクラスの空間 X の正則表現の Plancherel 測度の台に関して

$L^2(X)$ が緩増加ユニタリ表現のみで既約分解できるか？

すなわち，「正則表現 $L^2(X)$ はいつ緩増加となるか？」という基本的な問題を考える．これに対して，最近，微分方程式を全く用いず，幾何的群論の発想を取り入れた新しい手法が Benoist と筆者によって開発された．すなわち，一般の実代数多様体 X のコンパクト集合 S に対して S と gS の交わりの体積

$$\mathrm{vol}(gS \cap S)$$

を $g \in G$ の関数とみなし，無限遠での挙動を幾何学的に評価する手法が開発され，正則表現 $L^2(X)$ の緩増加性の判定条件が証明された．

参考文献

[1] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, Laguerre semigroup and Dunkl operators, Compositio Mathematica, **148**, (2012), pp. 1265–1336.

[2] 藤原英徳，指数型可解リー群のユニタリ表現　軌道の方法，数学書房, 2010.

[3] Gelfand et al., Generalized Functions, V (英訳)，Academic Press, 1966.

[4] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[5] J. Hilgert, T. Kobayashi, J. Möllers, Minimal representations via Bessel operators, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), pp. 349–414.

[6] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Second printing, Graduate Texts in Mathematics, **9**. Springer-Verlag, 1978.

[7] A. A. Kirillov, Lectures on the Orbit Method. Graduate Studies in Mathematics, **64**. American Mathematical Society, 2004. xx+408 pp.

[8] T. Kobayashi, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現，数学 **46**, (1994), pp. 124–143, 日本数学会，(英訳: アメリカ数学会, 1998).

[9] T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications, Invent. Math., **117**, (1994); Part II, Ann. of Math., **147**, (1998); Part III, Invent. Math., **131**, (1998).

[10] T. Kobayashi, Restrictions of unitary representations of real reductive groups, Progr. Math., **229**, pp. 139–207, Birkhäuser, 2005.

[11] T. Kobayashi, Birth of new branching problems. 日本数学会 70 周年記念 · 特別記念講演記録，pp. 65–92, Mathematical Society of Japan, 2016.

[12] 小林俊行，大島利雄，リー群と表現論，岩波書店，2005 年.

[13] R. P. Langlands, “On the classification of irreducible representations of real algebraic groups”, Math. Surveys Monogr., **31**, Amer. Math. Soc. (1989).

[14] J.-P. Serre, Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts, Séminaire Bourbaki, 1954.

[15] M. Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, **11**, (1959), pp. 374–434.

[16] 辰馬伸彦，位相群の双対定理（紀伊國屋数学叢書 **32**）1994 年.

[17] D. A. Vogan, Jr., Representations of Real Reductive Lie Groups, Progr. Math., **15**, Birkhäuser, 1981.

CoreCourseMath<2016/12/02, beta1 keibundou.corp. n.miyakawa>: pLaTeX2e<2017/05/05>+0 (based on LaTeX2e<2017-04-15>+0):