

修士課程学生 (Master's Course Student)

森田 陽介 (MORITA Yosuke)
(FMSP コース生)

A. 研究概要

等質空間 G/H の開集合を G の作用で貼り合わせて得られる空間 M のことを, G/H を局所モデルに持つ多様体という. Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ がその典型的な例である.

G が線型簡約 Lie 群, H が G のコンパクト部分群の場合には, G/H の Clifford–Klein 形でコンパクトなものが常に存在する (A. Borel, 1963). 一方 H が G の非コンパクト簡約部分群の場合には, G/H のコンパクト Clifford–Klein 形 (またはより一般に, G/H を局所モデルとするコンパクト多様体) が存在するとは限らない.

私は本年度の研究において, Lie 環の相対コホモロジーに関するある条件が成り立つとき, G/H を局所モデルとするコンパクト多様体は存在しないことを示した. この定理は, 小林俊行・小野薫両氏が与えた結果の拡張になっている. さらに, 同変 de Rham コホモロジーの Weil 準同型を用いることで, 不変多項式に関するより簡単な条件から, 前述の条件が従うことを示した.

この定理を用いて, コンパクト多様体の局所モデルとなりえない等質空間の新しい例を幾つか与えることができる. 特に G/H が既約対称空間の場合に, 前述の条件を満たすものを完全に分類した. 例えば, $SL(p+q, \mathbb{R})/SO(p, q)$ (p, q : 奇数) を局所モデルとするコンパクト多様体は存在しない.

A manifold M is said to be locally modelled on a homogeneous space G/H if it is covered by open sets that are diffeomorphic to open sets of G/H and their transition functions are locally in G . A typical examples is a Clifford–Klein form $\Gamma \backslash G/H$.

If G is linear reductive and H is compact, G/H always admits a compact Clifford–Klein form (A. Borel, 1963). In contrast, if H is a non-compact reductive subgroup of G , a compact Clifford–Klein form of G/H (or, more generally, a compact manifold locally modelled on G/H) does not necessarily exist.

In this academic year, I proved that there does not exist a compact manifold locally modelled on G/H if some condition about relative Lie

algebra cohomology is satisfied. This generalises the result of Kobayashi–Ono. Furthermore, using the Weil homomorphism of equivariant de Rham cohomology, I showed that the above condition follows from another condition about invariant polynomials, which is easy to verify in typical cases.

Applying this theorem, I obtained some new examples of a homogeneous space that cannot be a local model of a compact manifold. In particular, I classified the irreducible symmetric spaces which satisfy the above-mentioned condition about relative Lie algebra cohomology. For instance, there does not exist a compact manifold locally modelled on $SL(p+q, \mathbb{R})/SO(p, q)$ if p and q are odd.

B. 発表論文

1. Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms, preprint, arXiv:1310.7096.
2. 森田陽介, Obstructions for the existence of compact manifolds locally modelled on homogeneous spaces, 東京大学修士論文 (2014).

C. 口頭発表

1. 簡約型等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約, 2013 年度表現論シンポジウム, マホロバマインズ三浦, 2013 年 11 月.

G. 受賞

1. 理学部学修奨励賞 (2012)
2. 東京大学総長賞 (2012)