

田中 雄一郎 (TANAKA Yuichiro)
(学振 DC1) 数理学専攻 博士課程 2 年

研究概要

リー群の無重複表現の統一的扱いをその目的として、小林俊行氏は「複素多様体への可視的な作用の理論」を導入した。この理論によって、有限次元でも無限次元でも、さらには離散分解しても連続スペクトラムを含んでも、無重複表現を一つの枠組みで捉えることができる。

可視的作用を動機付けとして、小林氏は symmetric でないような部分群によるリー群の分解の系統的な扱いを初めて行った。symmetric な部分群によるカルタン分解については、É. Cartan に始まる豊富な研究がある。簡約リー群 G とその部分群の組 (L, H) に対し、 (G, L) , (G, H) が共にコンパクト対称対である場合の分解 $G = LAH$ については B. Hoogenboom 氏と松木敏彦氏による、 (G, L) が非コンパクトリーマン対称対で (G, H) が一般の対称対である場合の分解 $G = LAH$ については M. Flensted-Jensen 氏による、そして (G, L) , (G, H) が共に一般の対称対である場合の両側剰余類 $L \backslash G / H$ は松木氏による研究がそれぞれなされている。小林氏は先述のように symmetric でないような組を扱い、特にユニタリ群 $G = U(n)$ に対して、一般化カルタン分解 $G = LBH$ を許容するレビ部分群の組 (L, H) の完全な分類を与えた。ただし、 B は G の Chevalley-Weyl 対合 σ による固定化部分群 G^σ の部分集合である。この (G, L, H, σ) の設定において、分解 $G = LBH$ は 3 つの強可視的作用 $L \curvearrowright G/H$, $H \curvearrowright G/L$, $\text{diag}(G) \curvearrowright (G \times G)/(L \times H)$ を導き (強可視性の三位一体)、さらに 3 つの無重複定理 $\text{Ind}_H^G \chi_H|_L$, $\text{Ind}_L^G \chi_L|_H$, $\text{Ind}_L^G \chi_L \otimes \text{Ind}_H^G \chi_H$ をもたらす (χ_L, χ_H はそれぞれ L, H のユニタリ指標)。

小林氏がユニタリ群に対する分類を与える際に導入した編み上げの手法と不変式論の議論、及び J. Stembridge 氏による有限次元無重複テンソル積表現の分類結果を用いて、私は A 型以外の全ての単純コンパクトリー群に対して、一般化カルタン分解を許容するレビ部分群の組の分類を与え、B, C, D, 例外型についてそれぞれ論文 2, 3, 4, 5 にまとめた。

また、本年度は無重複表現の「種」の分類に関する研究も行った。以下で、このことについて述べる。

冒頭にあるように、リー群の可視的作用は無重

複表現をもたらすが、それは小林氏によって証明された「無重複性の伝播定理」によってなされる。定理の内容を簡単に述べると、

“リー群の (同変ベクトル束の底空間への) 作用が可視的であるという複素幾何学的条件が満たされることにより、「小さな」表現 (ファイバー) の無重複性が「大きな」表現 (大域切断の空間) のそれへと伝播する”、

というものである。この無重複性の伝播定理を踏まえて、可視的な作用の理論の特筆すべき点を 2 点程挙げる。

特筆すべき点 1. 一般的な設定の下で適用可能である。即ち、

- リー群はコンパクトでも簡約型でもなくてよく、単にリー群でよい。
- 表現に対し、有限次元性や離散分解可能等の仮定は不要である。
- (リー群が作用する) 複素多様体はコンパクトでも非コンパクトでもよい。

これらは、可視的な作用の理論を用いることにより様々な無重複表現の統一的扱いが可能となることを示唆している。このことに加えてさらに、次のような良い点が挙げられる。

特筆すべき点 2. リー群の大きな (複雑な) 表現の無重複性を、

- 複素多様体への可視的作用の存在及び、
- より小さな (単純な) 表現の無重複性の 2 つへと帰着させることが、無重複性の伝播定理を用いることで可能となる。

無重複表現を生み出す元となるもの、という意味を込めて、このような小さな無重複表現を (無重複表現の) 「種」と呼ぶことにする。この用語は小林氏によって導入されたものである。

特に 2 つ目の点に注目すると、次のような問題が浮かぶ。

問題: 与えられたリー群の無重複表現に対し、それを幾何学的に実現するような可視的作用と「種」との組を見つけよ。

この問題において、リー群をユニタリ群、表現を無重複テンソル積表現とした場合は、小林氏によって既に解決されている。

私は本年度、直交群の無重複テンソル積表現を幾何学的に実現するような可視的作用と「種」との組を見つけた (論文は準備中)。

発表論文

1. Yuichiro Tanaka, Classification of visible actions on flag varieties, Proceedings of the

- Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, Japan Academy, No. 88, (2012), 91–96.
2. Yuichiro Tanaka, Visible actions on flag varieties of type B and a generalization of the Cartan decomposition, Bulletin of the Australian Mathematical Society, the Australian Mathematical Society, published online: 20 August (2012), 1–17.
 3. Yuichiro Tanaka, Visible actions on flag varieties of type C and a generalization of the Cartan decomposition, Tohoku Mathematical Journal, **65**, No. 2 (2013), 281–295.
 4. Yuichiro Tanaka, Visible actions on flag varieties of type D and a generalization of the Cartan decomposition, Journal of the Mathematical Society of Japan, **65**, No. 3 (2013), 931–965.
 5. Yuichiro Tanaka, Visible actions on flag varieties of exceptional groups and a generalization of the Cartan decomposition, Journal of algebra, doi:10.1016/j.jalgebra.2013.10.002.
 6. Yuichiro Tanaka, A generalized Cartan decomposition for connected compact Lie groups and its application, 数理解析研究所講究録, RIMS, Kyoto University, No. 1795 (2012), 117–134.
 7. 田中雄一郎, 旗多様体への可視的作用の分類とその応用, 数理解析研究所講究録, RIMS, Kyoto University, No. 1825 (2013), 133–141.
 3. 田中雄一郎, Visible actions on flag varieties and a generalization of the Cartan decomposition, FMSP student session, 東京大学大学院数理科学研究科, March 2013.
 4. Yuichiro Tanaka, Visible actions on flag varieties and a generalization of the Cartan decomposition (poster), Group Actions with applications in Geometry and Analysis: in honour of Toshiyuki Kobayashi 50th birthday, Reims, France, June 2013.
 5. 田中雄一郎, 直交群の無重複表現の幾何と可視的な作用, 表現論セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科, October 2013.
 6. Yuichiro Tanaka, Visible actions on generalized flag varieties -Geometry of multiplicity-free representations of $SO(N)$ -, JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013 -Discrete Mathematics and its Applications, 東京大学大学院数理科学研究科, November 2013.
 7. Yuichiro Tanaka, Visible actions on generalized flag varieties and a generalization of the Cartan decomposition, East Asian Core Doctorial Forum on Mathematics, Kyoto University, January, 2014.
 8. 田中雄一郎, 旗多様体への可視的作用とカルタン分解の一般化, 松木敏彦先生還暦記念研究集会, 県民ふれあい会館, 鳥取県, February 2014.

FMSP の活動への参加

1. FMSP lectures: Representations of reductive groups and L-functions
2. FMSP lectures: Horospheres: geometry and analysis
3. FMSP lectures: Lectures on quantum Teichmüller theory
4. 研究集会 Geometry and Analysis on Manifolds -A Memorial Symposium for Professor Shoshichi Kobayashi-
5. 研究集会 Geometry and Dynamics 2013

口頭発表

1. 田中雄一郎, 旗多様体への可視的作用の分類とカルタン分解の一般化, 幾何学セミナー, 首都大学東京南大沢キャンパス, November 2012.
2. 田中雄一郎, Visible actions on flag varieties and a generalization of the Cartan decomposition (ポスター発表), 城崎新人セミナー, 城崎総合支所, 兵庫県豊岡市城崎町桃島, February 2013.

6. 研究集会 JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013 -Discrete Mathematics and its Applications-
7. 研究集会 Tokyo-Seoul Conference in Mathematics -Differential Geometry-
8. 研究集会 Winter School on Representation Theory of Real Reductive Groups

受賞

2011 年度数理科学研究科長賞