

## JMSJ 論文賞受賞者のことば

JMSJ とは、日本数学会の出版する学術雑誌 Journal of the Mathematical Society of Japan の略称です。JMSJ 論文賞は、授賞年前年の JMSJ に掲載された論文のうち特に優れたもの（3 篇以内）の著者に贈られる賞です。

2015 年 JMSJ 論文賞は以下の 3 篇に贈られました。

著者：Joachim Hilgert 氏 (Univ. Paderborn), 小林 俊行 氏 (Toshiyuki Kobayashi, 東大数理・Kavli IPMU), Jan Möllers 氏 (Århus Univ.)

論文題目：Minimal representations via Bessel operators, JMSJ, 66 (2014), 349–414.



Joachim Hilgert 氏



小林 俊行 氏



Jan Möllers 氏

受賞者のことば：

コンパクトではない単純リー群には連続濃度の相異なる既約表現が存在しますが、その中で、極小表現は有限個しかない「極めて小さい無限次元表現」です。“極小”という言葉は、軸足が代数構造（群やリー環）にあることを反映しています。

発想を逆転させ、作用される空間に軸足をおくと「(群から見て) 表現がとても小さい」ということは「(表現空間から見て) 対称性がとびきり高い」といえるでしょう。後者の見方を真正面に据えて

### 表現論の研究 ⇒ 極小表現をモチーフとした大域解析

を指針にしてみると、散発的に発見していたことが繋がりはじめました。幸運にも、当初想像していた以上に豊かな数学的対象に出逢い、内外の多くの研究者の協力を得て、この 10 年あまりでこのテーマに関して延べ 1000 頁を越す論文を著すことになりました。共形幾何の山辺作用素の解析、フーリエ変換の一般化と変形理論、解析半群、(冪零軌道として現れる) シンプレクティック多様体の幾何的量子化、無限次元表現の分岐則、(4 階の Bessel 型微分方程式の) 特殊関数などがその話題に含まれます。JMSJ に掲載された 66 頁の論文もこのプロジェクトの一角を担っています。

連続濃度ある既約表現の中で有限個しかない極小表現になぜ着目するのか？ 表現論から見た風景と、大域解析や幾何からの風景を記してみたいと思います。

$O(p, q)$  や  $Sp(n, \mathbb{R})$  のような簡約リー群の既約ユニタリ表現の分類は Bargmann, Gelfand 以来さまざまな手法で深化してきましたが、今なお未解決問題です。既約表現だけならば、Lanlands による解析的手法, Vogan による代数的手法, 柏原等による  $D$  加群を用いた幾何的手法, という 3 種類の分類法が知られています。ただし, どの分類法もユニタリ性を解明できる形にはなっていません。

ここで, 根源的な表現とは何だろうか, と改めて問い直してみます。「分解」という観点からは, 既約表現が最小単位ですが, ユニタリ性や既約性を保つ「構成」という観点も加えて, もっと根源的なものを探せば, “源流”に相当する表現は実は“ごく少数しかない”ことがわかります。簡約リー群の**極小表現**はこの意味での根源的な表現です。テータ対応など保型形式の整数論で重要な Segal–Shale–Weil 表現はメタプレクティック群の極小表現です。

極小表現が“ごく少数しかない”ということは, さまざまな分野の数学に同一の極小表現が出現するという「偶然」の背景になっています。

一方, 極小表現が“源流にある”ということは, 表現論の既存の標準的手法(例えば放物誘導関手)では構成できないことを意味します。別の言い方をすると, もし  $G$  の極小表現をある多様体  $M$  上の  $L^2$  関数全体に実現できたとすると,  $G$  のリー環は  $M$  上のベクトル場として作用できないはずで, それほどまでに, このような多様体  $M$  は群  $G$  に比べて小さいのです。

JMSJ 論文では, リー環の作用としてベクトル場だけではなく 2 階の微分作用素も取り込むことによって, 極小表現の  $L^2$  模型を構成しました。この 2 階の偏微分作用素が論文タイトルにある Bessel operators で, 互いに可換な自己共役作用素の族をなします。極小表現のこの新しい幾何的実現では, ヒルベルト空間の内積は  $L^2$  内積という, もっとも扱いやすいものになっています。シンプレクティック幾何の立場からは, (ある仮定の下で) 極小冪零随伴軌道の幾何的量子化を与えていると解釈できます。代数的な道具としてはジョルダン代数を援用するのですが, 特別な場合として, ジョルダン代数が対称行列の場合は, Weil 表現のシュレーディンガー模型が再現されます。

極小表現の  $L^2$  模型では Weyl 群の元に対応したユニタリ作用素として, ユークリッド空間におけるフーリエ変換の役割を果たすような重要な作用素が定義されます(アメリカ数学会, メモワール 1000 号)。一方,  $L^2$  模型の双対的な概念が, 多重調和関数や共形幾何に現れる山辺作用素の大域解の空間になります。

極小表現そのものは表現としてはきわめて特殊である一方, 極小表現をモチーフとした大域解析は若いテーマです。極小表現はあちこちの異分野の数学の中に芽吹き, 大域解析と現代の表現論を結びつけるひとつの原動力として, 魅力的な素材をたくさん提供している新緑のように感じています。