

FMSP レポート

博士 3 年 45-137020

中濱 良祐

1 博士論文の概要

私は博士論文で、正則離散系列表現の解析に関して現れる特殊関数、再生核、作用素などの性質について研究した。正則離散系列表現は、1956年に Harish-Chandra によって発見された表現であり、実簡約リー群の無限次元ユニタリ表現の中で最も深く研究しやすい表現のクラスの1つである。\$G\$ を実簡約リー群としたとき、\$G\$ がエルミート型の場合、つまりリーマン対称空間 \$G/K\$ が自然な複素構造を持つとき、\$G\$ は正則離散系列表現を持つ。一般に \$G\$ がエルミート型るとき、\$G/K\$ はある複素ベクトル空間内のある複素領域 \$D\$ と微分同相になる。次に、\$(\tau, W)\$ を \$K^{\mathbb{C}}\$ の有限次元表現、\$\chi^{-\lambda}\$ を \$K\$ の普遍被覆群 \$\tilde{K}^{\mathbb{C}}\$ の1次元表現とすると、普遍被覆群 \$\tilde{G}\$ が正則ベクトル束の正則切断の空間 \$\Gamma_{\mathcal{O}}(G/K, \tilde{G} \times_{\tilde{K}} (W \otimes \chi^{-\lambda}))\$ に作用する。ここで複素領域 \$D \simeq G/K\$ は可縮なため、この正則切断の空間は \$D\$ 上のベクトル値正則関数の空間 \$\mathcal{O}(D, W)\$ に同型になる。もし \$\lambda\$ が十分大きい場合、\$\mathcal{O}(D, W)\$ への \$\tilde{G}\$ の作用 \$\tau_{\lambda}\$ は \$D\$ 上の収束する積分で与えられる内積を保つ。このとき、対応するヒルベルト空間 \$(\tau_{\lambda}, \mathcal{H}_{\lambda}(D, W))\$ は正則離散系列表現の具体的実現を与える。さらに \$G\$ がチューブ型るとき、つまり \$G/K\$ がある管状領域 \$T_{\Omega} = V + \sqrt{-1}\Omega \subset V^{\mathbb{C}}\$ と同相となるとき、正則離散系列表現は対称錐 \$\Omega\$ 上のある測度に関する二乗可積分空間上にも実現される。

さて、私の博士論文は全部で3章からなるが、その第1章では、多変数ベッセル関数について取り扱った。一般に \$G\$ をチューブ型のリー群としたとき、その管状領域の実現 \$G/K \simeq V + \sqrt{-1}\Omega\$ に現れる \$V\$ はユークリッド型ジョルダン代数の構造を持つ。このとき、\$V^{\mathbb{C}}\$ 上の多変数ベッセル関数 \$\mathcal{I}_{\lambda} \in \mathcal{O}(V^{\mathbb{C}})\$ が Dib (1990) によって級数展開を用いて定義された。私はこの論文中で、\$\mathcal{I}_{\lambda}(x^2)\$ の新たな積分表示を発見し、これを用いて \$\mathcal{I}_{\lambda}(x^2)\$ の上からの評価

$$|\mathcal{I}_{\lambda}(x^2)| \leq C \left(1 + |x|_1^{\max\{2n-r \operatorname{Re}(\lambda), 0\}}\right) e^{2|\operatorname{Re} x|_1}$$

を示した。ただし \$n = \dim V, r = \operatorname{rank} V\$ である。さらにここから、正則離散系列表現を \$G\$ の極大コンパクト部分群 \$K\$ の中心へ制限したものの自然な拡張として現れる複素1次元解析半群の積分核が指数減少することを示した。

第2章では、\$\mathcal{H}_{\lambda}(D, W)\$ の再生核の展開を具体的に計算した。いま、\$G\$ を古典型のエルミート型リー群とし、\$K\$ の表現 \$(\tau, W)\$ として \$\mathcal{H}_{\lambda}(D, W)\$ が \$K\$ の下で無重複に分解するようなものとする。このとき、\$\lambda \gg 0\$ ならば \$\lambda\$ の値にかかわらず \$K\$-有限なベクトルの全体は多項式の空間に一致し、その \$K\$-タイプ分解も \$\lambda\$ に依らない。私はこの論文中で、\$G\$ と \$W\$ が上の仮定を満たすときに、\$\lambda \gg 0\$ における \$\mathcal{H}_{\lambda}(D, W)\$ の再生核 \$K_{\lambda}(z, w)\$ を各 \$K\$-タイプの再生核を用いて展開したときに現れる係数を、\$\lambda\$ の関数として具体的に計算した。この係数の符号を見ることにより、\$\lambda\$ が小さくなって \$\mathcal{O}(D, W)\$ の内積を定義する積分が収束しなくなっても、核関数 \$K_{\lambda}(z, w)\$ が正定値になる場合があることがわかり、対応する \$(\tau_{\lambda}, \mathcal{O}(D, W))\$ 内のヒルベルト空間がユニタリ部分表現を与えることがわかる。これは Enright-Howe-Wallach (1983) および Jakobsen (1983) のユニタリ最高ウェイト表現の分類の結果の一部に対する解析的な別証明を与える。

第3章では、2つの正則離散系列表現の間の絡作用素を具体的に構成した。一般に $G \supset G_1$ を、埋め込み写像 $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$ が正則となるようなエルミート型リー群の対とし、 \mathcal{H} を G の正則離散系列表現とすると、 \mathcal{H} の G_1 への制限 $\mathcal{H}|_{G_1}$ は離散分解し、その重複度は有限かつ一様有界になることが知られている (小林, 2007)。私はこの論文で、特に G, G_1 が古典型で (G, G_1) が対称対であり、 \mathcal{H} が G のスカラー型正則離散系列表現の場合に、 $\mathcal{H}|_{G_1}$ の分解に現れる G_1 のスカラー型既約表現 \mathcal{H}_1 から \mathcal{H} への G_1 -絡作用素を具体的に無限解微分作用素の形で書き下した。

2 周辺分野も見据えた自身の研究の位置付け

私の博士論文の第1章、多変数ベッセル関数の研究は、もともと複素解析半群への応用を念頭に置いて行ったものである。実リー群の最高ウェイト表現を複素解析半群の表現の観点から理解するという問題は Gelfand-Gindikin (1977) によって提唱され、Stanton (1986) および Ol'shanskii (1981, 91, 95) によってその一般論は完成した。さらに、この一般論は小林-真野 (2007) による Laguerre 半群の理論につながり、その後極小表現の大域解析やフーリエ変換の変形理論を生み出した。私の結果からは、 G の極大コンパクト部分群 K の中心の作用を拡張した1次元解析半群の $L^2(\Omega)$ への作用がヒルベルト-シュミット作用素を与えることがわかる。この事実は Ol'shanskii による一般論からも従うが、私はこの事実に表現論を直接用いない別証明を与えたことになる。また私の多変数ベッセル関数の評価式は、Möllers (2013) による代数的 Whittaker ベクトルの解析性の証明にも応用されている。

博士論文の第2章、再生核の研究は、ユニタリ最高ウェイト表現の分類にかかわる研究である。この分類の研究、つまり \tilde{G} の表現 $(\tau, \mathcal{O}(D, W))$ についてファイバー W を固定したとき、どの λ に対してユニタリ部分表現が存在するかを決定する問題は、Berezin (1975), Vergne-Rossi (1976), Wallach (1976) などによって研究され、Enright-Howe-Wallach (1983) および Jakobsen (1983) により完全に決定された。その後、その部分的な結果に対して Clerc (1995), Faraut-Korányi (1990) などによる解析的手法による別証明も与えられた。私の研究は、Faraut-Korányi による研究をなぞったものである。この手法のメリットとして、ユニタリ部分表現が存在する λ を具体的に決定できるのみならず、対応するヒルベルト空間に付随する (\mathfrak{g}, K) -加群を再生核の情報から具体的に決定できること、さらにユニタリ化可能でない λ に対しても $(\tau, \mathcal{O}(D, W))$ の組成列に関する情報を取り出せることなどがあげられる。

博士論文の第3章、絡作用素の研究に関して、一般に $G \supset G_1$ をリー群の対としたとき、 G の表現 \mathcal{H} の G_1 への制限 $\mathcal{H}|_{G_1}$ を考えると、一般には良い性質を持つとは限らない。しかし、 $\mathcal{H}|_{G_1}$ が良い振る舞いをする、例えば離散分解する、あるいは無重複に分解するなどの条件が1990年代に小林氏によって見出された。さらに、小林氏はその分解を具体的に書き下す問題の重要性を提唱し (Progr. Math. 2015 の概説論文参照)、この問題は Clerc-小林-Ørsted-Pevzner (2011), 小林-Pevzner (2015), 小林-Speh (2015), Möllers-大島 (2015), Peng-Zhang (2004) などによって研究された。私の研究もこの流れに続くものである。

3 研究の他分野への応用や展開の可能性

正則離散系列表現及びユニタリ最高ウェイト表現は、しばしば物理学などの分野と関わりを持つ。例えば、 $Sp(n, \mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上に実現された Weil 表現は、自由粒子の正準量子化

など関係が深く、また、小林-真野 (2007) による $O(2, n)$ の極小表現は水素原子の量子力学とかかわっている。また、群の表現の部分群への制限の研究は、物理学における対称性の破れの概念に近く、何らかの関連があることが期待される。以上より、私の研究も将来的に物理学などほかの分野との関わりが現れることを期待したい。

4 FMSP プログラムに参画したことが自身にどのような影響を与えたか

FMSP プログラムに参画することにより、修士時代から奨励金を頂くことができ、経済的な心配をすることなく研究に専念することができた。また、社会数理特別講義などを通して、通常の研究生生活では知り得なかったであろう、実社会での数学の使われ方を学ぶことができ、以前よりも広い視野を持てるようになった。