

里見 貴志 (Satomi Takashi)

学振 DC1

数理科学専攻 博士課程 1 年

研究概要

私は 2 つの研究テーマについて研究している。

1 つ目は、有限群の Cayley グラフの expander 性評価についての研究である。

k -正則無向有限グラフ \mathcal{G} の隣接行列の固有値はすべて $[-k, k]$ 内に収まることが知られている。この固有値のうち 2 番目に大きいものを λ_2 とし、 $\epsilon \leq 1 - \lambda_2/k$ とするとき、 \mathcal{G} は (one-sided) ϵ -expander グラフであるという。この ϵ の値が大きいとき、 \mathcal{G} は expander 性が高いという。

Tao は Balog-Szemerédi-Gowers の定理を拡張し (重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理)、それを用いることで Cayley グラフの expander 性を調べる方法を確立した。

重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理とは「群上の正値関数 f が $\|f\|_1 = 1$, $\|f * f\|_2 = K^{-1}\|f\|_2$ をみたすとき、ある定数 n が存在し、 f のノルムに対し位数が大きすぎず小さすぎない $O(K^n)$ -approximate group が存在する」という定理である (ここで、 $f * f$ は二つの f の群上の畳み込みであり、 $\|\cdot\|_p$ は数え上げ測度の L^p ノルムである)。この定理の n の値が小さいほど Cayley グラフの expander 性の評価を強くできる。

Balog-Szemerédi-Gowers の定理の証明では、「任意の二部グラフ (A, B, E) に対し、ある集合 $A' \subset A$, $B' \subset B$ が存在し、任意の $A' \times B'$ の元に対しそれらを結ぶ長さ 3 の経路の個数が十分多く存在する」ということが使われている。私は長さ 3 以上の経路の場合でもこの補題が成り立つことを示し、さらに A, B が有限測度空間の場合に一般化した。

また、私はこの補題を使わずに重み付き Balog-Szemerédi-Gowers の定理を直接証明することで、 n の値を小さくする方法を見つけた。さらに、 G がユニモジュラーな局所コンパクト群の場合に同様の定理が成り立つことを示した。これにより、Bourgain-Gamburd や Tao の Cayley グラフの expander 性を調べる定理の評価をより強めることができた。

2 つ目は、一般の局所コンパクト群に関する Young の不等式の最良値についての研究である。

$1 + 1/q = 1/p_1 + 1/p_2$ となる $p_1, p_2, q \geq 1$ に対し、 $\|\phi_1 * \phi_2\|_q \leq \|\phi_1\|_{p_1} \|\phi_2\|_{p_2}$ という関係が成り立つ (測度はユニモジュラーな局所コンパクト群 G の Haar 測度)。

ここで、 $p_1, p_2 > 1$ とする。このとき、 G が開かつコンパクトな部分群を持つことが、等号成立する場合があるための必要十分条件となることが Fournier によって示されている。

以降、 G が開かつコンパクトな部分群を持たないとする。任意の ϕ_1, ϕ_2 に対し $\|\phi_1 * \phi_2\|_q \leq c \|\phi_1\|_{p_1} \|\phi_2\|_{p_2}$ をみたすような best possible な定数 c を $c(G)$ とする。Fournier は G が開かつコンパクトな部分群を持たないならば、 $c(G)$ は G によらないある定数 $C < 1$ で上から抑えられることも示した。私は、このような $C < 1$ の best possible な定数が $c(\mathbb{R})$ になる、すなわち G が開かつコンパクトな部分群を持たないならば $\|\phi_1 * \phi_2\|_q \leq c(\mathbb{R}) \|\phi_1\|_{p_1} \|\phi_2\|_{p_2}$ が成り立つことを示した。

さらに、 $p \geq 1$ と $\|\phi_1\|_1, \|\phi_1\|_\infty, \|\phi_2\|_1, \|\phi_2\|_\infty$ を固定したとき、 $\|\phi_1 * \phi_2\|_p$ の取りうる値の上限を与えた。また、 $G = \mathbb{R}$ のときに $\|\phi_1 * \phi_2\|_p$ が上限の値と一致する場合が存在することも証明した。

発表論文

1. T. Satomi : 算術的組み合わせ論による等質空間上のたたみ込みのスペクトル評価, 東京大学大学院数理科学研究科修士論文 (2019).
2. T. Satomi : 局所コンパクト群上のたたみ込みの L^p 収束性と Young の不等式の関係, 京都大学数理解析研究所講義録 **2139** (2019) 136–147.

口頭発表

1. Selberg’s expander construction (after Tao) について, Workshop on “Actions of Reductive Groups and Global Analysis”, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2017 年 8 月.
2. (1) Freiman’s product theorem の紹介, (2) Balog-Szemerédi-Gowers の定理の評価の改良と一般の不変測度への拡張, Workshop on “Actions of Reductive Groups and Global Analysis”, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2018 年 8 月.

3. 群上のたたみ込み関数の L^2 評価とグラフ理論の関係, 作用素環セミナー, 東京大学数理科学研究科, 2019 年 4 月.
4. 群上のたたみ込みに関する Young の不等式の拡張, RIMS 共同研究「表現論とその周辺分野の進展」(研究代表者: 大島芳樹先生), 京都大学数理解析研究所, 2019 年 7 月.
5. Larsen-Pink-Tao による $SL_d(k)$ の Product theorem の紹介, Workshop on “Actions of Reductive Groups and Global Analysis”, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2019 年 8 月.
6. ユニモジュラーな局所コンパクト群上でのたたみ込みの L^p 評価と Young の不等式の関係, 2019 年度表現論ワークショップ, 県民ふれあい会館 (鳥取県立生涯学習センター), 2020 年 1 月.

FMSP の活動への参加

1. 社会数理実践研究, 東京大学大学院数理科学研究科, 2019 年. ダンス評価に関する数理的アプローチの考察について, 他の人と議論を交えながら考察した.
2. 産業界からの課題解決のためのスタディグループ, 東京大学大学院数理科学研究科, 2019 年 12 月. ダンス評価に関する数理的アプローチの考察について, 他の人と議論を交えながら考察し, 新しい評価方法を考案した. また, 得られた結果について発表した.