２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系）第３回

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：春田　力

$1 \leq i, j \leq m$, 実数$\lambda \neq 0$ に対し、m 次の正方行列 $E_i(\lambda), N_{ij}, P_{ij}$ を以下のように定める。ここで、特に書かれていない部分の成分は 0 とする。

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & i\,\text{列} & & & \end{array} \\
E_i(\lambda) = \ i\,\text{行} & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\Big(E_i(\lambda)$ は、(i,i) 成分がλ, その他の対角成分が 1 の行列。$\Big)$

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & i\,\text{列} & & & \end{array} \\
N_{ij} = & \\
j\,\text{行} & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\Big(N_{ij}$は、対角成分と (j,i) 成分が 1 の行列。$\Big)$

$$
P_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{列} & & & & j\text{列} & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \end{array}
$$

$\Big(P_{ij}$は、単位行列の i 行と j 行を入れ替えたもの。$\Big)$

問 1. $m = 3$ の時　P_{ij}, N_{ij} を具体的に書き表せ。

問 2. m 行 n 列の行列 A に $E_{ij}(\lambda), N_{ij}, P_{ij}$ を左からかけると、

(1) A の第 i 行を λ 倍する。

(2) A の第 i 行を第 j 行に加える。

(3) A の第 i 行と第 j 行を交換する。

が得られることを示せ。

問 3. A の第 i 行の λ 倍を第 j 行に加えるという操作を、問 2 の (1),(2),(3) の行基本変形を組み合わせることによって行うためにはどうすればよいか？

問 4. 2 行 3 列の行列は行基本変形を繰り返すことによって

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のいずれかの形に変形できることを示せ。ここで $*$ は適当な数字である。

問 5. 3 行 2 列の行列は行基本変形を繰り返すことによって、どのような形に変形できるか？