２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系）第２回　の略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：及川 一誠

問 1. (1)

- $(i+1)^2-(i-1)^2=4i$ という関係式を利用する．両辺を $i=1,2,\cdots,n$ について足し合わせると
$$(n+1)^2+n^2-1=4\sum_{i=1}^{n} i$$
が得られる．左辺は $2n(n+1)$ であるから結局,
$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$
となる．
- 同様に, $(i+1)^3-(i-1)^3=6i^2+2$ を $i=1,2,\cdots,n$ について足し合わせると
$$(n+1)^3+n^3-1=6\sum_{i=1}^{n} i^2+2n$$
となる．これを整理すると, 次のようになる．
$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
- 同様に, $(i+1)^4-(i-1)^4=8(i^3+i)$ という式を $i=1,2,\cdots,n$ について足し合わせてやると, 次式が得られる．
$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2)=\frac{1}{6}n^2(n+1)(7n+5).$

(4) $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} 1=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$

(5) $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} 1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1=\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

(6) 次が成り立つことに注意する.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) + \sum_{1\le j\le i\le n}(i+j) - \sum_{i=1}^{n}(2i)$$

右辺の第 1 項目と第 2 項目とが等しいので,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) + \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)^2\end{aligned}$$

となる.

(7) 次式が成り立つことに注意する.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) + \sum_{1\le i<j\le n}(j-i) = \sum_{1\le i\le j\le n}(2j)$$

右辺は計算すると $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$ であることがわかり, 左辺の第 1 項は既知なので, 結局次を得る.

$$\sum_{1\le i<j\le n}(j-i) = \frac{1}{6}n(n-1)(n+1).$$

問 2. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a^{n-1} & a^{2(n-1)} & \cdots & a^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$