特任研究員 (Project Researcher)
中濱 良祐 (NAKAHAMA Ryosuke)

A. 研究概要

簡約リー群の無限次元表現論は，20 世紀中盤より研究が始められ，現在も代数・幾何・解析の立場から活発に研究されている分野である．一般に無限次元表現は有限次元表現に比べて扱いが難しいが，その中でも正則離散系列表現は，リー群の無限次元表現の中で比較的扱いやすい．私はこれを具体的な関数空間に実現することで，その性質について研究してきた．

ここでは，エルミート対称空間 G/K を有界対称領域 D として実現することにする．このとき，$\tilde{G}$ を G の普遍被覆群とすると，D 上の $\tilde{G}$-同変ベクトル束 $\mathcal{W} \to D$ は，ファイバーとなるベクトル空間 W を固定したとき，一次元の自由度 (λ とする) を持つ．もし $\lambda \in \mathbb{R}$ が十分大きければ，正則切断の空間 $\mathcal{O}(D, \mathcal{W}_\lambda)$ 上に $\tilde{G}$-不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ が積分で与えられ，対応するヒルベルト空間 (重み付きベルグマン空間) $\mathcal{H}_\lambda(D, \mathcal{W}) \subset \mathcal{O}(D, \mathcal{W}_\lambda)$ が正則離散系列表現を与える．

私は最近は正則離散系列表現を部分群に制限したときの振る舞いに興味を持っている．一般に (G, G_1) を正則型の対称対，すなわちリーマン対称空間の埋め込み写像 $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$ が正則写像となる対称対のとき，G の任意の正則離散系列表現は G_1 に制限すると離散分解し，その重複度は一様有界になることが知られている (小林，2007)．私は G_1 の正則離散系列表現 $\mathcal{H}_1$ から G の正則離散系列表現 $\mathcal{H}$ の G_1-同変な埋め込み写像を，$\mathcal{H}$ がスカラー型，$\mathcal{H}_1$ が G_1 の極大コンパクト部分群 K_1 の下で無重複という仮定の下で，無限階微分作用素の形で具体的に構成した．また，極に当たるパラメータに対し，この写像の留数が部分商からの写像を導く様子を見た．

しかし応用上は，逆向きの G_1-絡作用素 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ のほうが重要であるように思われる．私は (G, G_1) が $(Sp(n, \mathbb{R}), U(n', n''))$ などの対称対の場合に，$D \subset \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C})$ 上の指数関数と，$\mathrm{Sym}(n', \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(n'', \mathbb{C})$ 上の多項式との内積 $\left\langle \det(x)^k f(z), \exp \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ {}^t y & z \end{pmatrix} \overline{A} \right) \right\rangle_\lambda$ を具体的に計算することにより，G_1-絡作用素 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ を $\mathcal{H}$ がスカラー型，かつ $\mathcal{H}_1$ の極小 K-タイプに $U(n')$ がスカラーで作用する場合に有限階の微分作用素として具体的に構成した．

The infinite-dimensional representation theory of reductive Lie groups has been studied since mid 20th century, and even now it is actively studied from the viewpoint of algebra, geometry and analysis. In general, infinite-dimensional representations are more difficult to treat than finite-dimensional representations, but among these, holomorphic discrete series representations are relatively easy to handle. I have studied the properties of these representations by realizing them on explicit function spaces.

Here we realize the Hermitian symmetric space G/K as a bounded symmetric domain D. Let $\tilde{G}$ be the universal covering group of G. Then the family of $\tilde{G}$-equivariant vector bundles $\mathcal{W} \to D$ has a 1-dimensional degree of freedom (put λ), when we fix the fiber W. Then if $\lambda \in \mathbb{R}$ is sufficiently large, then there exists a $\tilde{G}$-invariant inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ on the space of holomorphic sections $\mathcal{O}(D, \mathcal{W}_\lambda)$ given by an integral, and the corresponding Hilbert space (weighted Bergman space) $\mathcal{H}_\lambda(D, \mathcal{W}) \subset \mathcal{O}(D, \mathcal{W}_\lambda)$ gives a holomorphic discrete series representation.

Recently I am interested in the behavior of the restriction of holomorphic discrete series representations to subgroups. In general, let (G, G_1) be a symmetric pair of holomorphic type, namely, a symmetric pair such that the embedding map $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$ of Riemannian symmetric spaces is a holomorphic map. Then it is known that the restriction of arbitrary holomorphic discrete series representation to G_1 decomposes discretely, and its multiplicity is uniformly bounded (Kobayashi, 2007). I constructed the G_1-equivariant embedding map from a holomorphic discrete series representation $\mathcal{H}_1$ of G_1 into a holomorphic discrete series representation $\mathcal{H}$ of G in the form of infinite-order differential operators, under the assumption that $\mathcal{H}$ is of scalar type and $\mathcal{H}_1$

is multiplicity-free under the maximal compact subgroup K_1 of G_1. Also, when the parameter is at a pole, I observed that its residue induces a map from some subquotient module.

However, the G_1-intertwining operator $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ of opposite direction seems more important for application. For some symmetric pairs such as $(G, G_1) = (Sp(n,\mathbb{R}), U(n', n''))$, I constructed the G_1-intertwining operator $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ when $\mathcal{H}$ is of scalar type and when $U(n')$ acts by scalar on the minimal K_1-type of $\mathcal{H}_1$, by computing the inner product $\left\langle \det(x)^k f(z), \exp\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ {}^t y & z \end{pmatrix}\overline{A}\right)\right\rangle_\lambda$ of an exponential function on $D \subset \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ and a polynomial on $\mathrm{Sym}(n',\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(n'',\mathbb{C})$.

B. 発表論文

1. R. Nakahama, “Weighted Bergman inner products on subspaces of bounded symmetric domains”, 数理解析研究所講究録 **2139**, 「表現論とその周辺分野の進展」(編集者: 大島芳樹先生 (大阪大学)) (2019), 148–164.
2. R. Nakahama, “Construction of intertwining operators between holomorphic discrete series representations”, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **15** (2019), 036, 101 pages.
3. R. Nakahama, “Multivariate Bessel functions and hypergeometric polynomials of matrix argument”, 表現論シンポジウム講演集 (編集者: 井上順子先生 (鳥取大学)，森義之先生 (岡山理科大学)) (2018).
4. R. Nakahama, “Intertwining operators between holomorphic discrete series representations”, Josai Mathematical Monographs vol. 10, Proceedings of JMM workshop on Representation Theory and Differential Equations (編集者: 廣惠一希先生，井沼学先生，小木曽岳義先生，大島利雄先生 (城西大学)) (2017), 19–36.
5. R. Nakahama, “Norm computation and analytic continuation of vector valued holomorphic discrete series representations”, J. Lie Theory **26** (2016), no. 4, 927–990.
6. R. Nakahama, “Intertwining operators between holomorphic discrete series representations”, 実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集 (編集者: 示野信一先生 (関西学院大学)，松岡勝男先生 (日本大学)) (2016), 45–60.
7. R. Nakahama, “Some topics on analysis of holomorphic discrete series representations (正則離散系列表現の解析に関するいくつかの話題)”, 学位論文 (指導教員: 小林俊行先生 (東京大学)) (2016), 東京大学.
8. R. Nakahama, “Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representaions”, 数理解析研究所講究録 **1977**, 表現論および関連する調和解析と微分方程式 (編集者: 竹村剛一先生 (中央大学)) (2015), 91–108.

C. 口頭発表

1. “Weighted Bergman inner products on subspaces of bounded symmetric domains”, 日本数学会秋季総合分科会，金沢大学, 2019 年 9 月.
2. “Weighted Bergman inner products on subspaces of bounded symmetric domains”, RIMS 共同研究 (公開型) 「表現論とその周辺分野の進展」(世話人: 大島芳樹先生 (大阪大学))，京都大学数理解析研究所，2019 年 7 月.
3. “Subspace of Hermitian symmetric space of rank 2 and hypergeometric polynomials”, 日本数学会年会，東京工業大学，2019 年 3 月.
4. “Subspace of Hermitian symmetric space of rank 2 and hypergeometric polynomials”, Langlands and Harmonic analysis (世話人: 八尋耕平氏 (東京大学))，ホテルサンバリーアネックス (大分県)，2019 年 3 月.
5. “Multivariate Bessel functions and hypergeometric polynomials of matrix argument”, 表現論シンポジウム (世話人: 井上順子先生 (鳥取大学)，森義之先生 (岡山理科大学))，国民宿舎水明荘 (鳥取県)，2018 年 11 月.
6. “Multivariate Bessel functions and hy-

pergeometric polynomials of matrix argument", 調和解析セミナー (世話人: 吉野邦生先生 (東京都市大学))，東京都市大学，2018 年 9 月.

7. "Intertwining operators between holomorphic discrete series representations", Harmonic analysis forum (世話人: 吉野邦生先生 (東京都市大学)), 東京都市大学, 2018 年 3 月.
8. "正則離散系列表現の間の絡作用素", AGU 新春セミナー (世話人: 西山享先生 (青山学院大学))，青山学院大学，2018 年 1 月.
9. "Intertwining operators between holomorphic discrete series representations", 日本数学会秋季総合分科会，山形大学，2017 年 9 月.
10. "Norm computation and analytic continuation of vector-valued holomorphic discrete series representations", Harmonic analysis forum (世話人: 吉野邦生先生 (東京都市大学)), 東京都市大学，2017 年 2 月.