博士課程学生 (Doctoral Course Student)
伊藤　要平 (ITO Yohei)

A. 研究概要

特異点が全て確定特異点となる Fuchs 型常微分方程式とモノドロミーが 1 対 1 に対応するか？という確定特異点型 Riemann-Hilbert 問題の高次元版は柏原氏により $\mathcal{D}$-加群の言葉に翻訳され 1984 年頃に同氏により肯定的に解決された。具体的には、複素多様体 X 上の確定特異点型ホロノミー $\mathcal{D}$-加群の三角圏と X 上の複素構成可能層の三角圏が圏同値である事が示された。その後、その柏原の定理を不確定特異点型の場合に拡張するという問題は 30 年ほど未解決な状態が続いたが、柏原氏と Schapira 氏による帰納層 (ind-sheaf) の理論と望月氏や Kedlaya 氏による高次元版の福原-Levelt-Turrittin 理論を皮切りに D'Agnolo 氏と柏原氏により大きく進展した。具体的には、複素多様体 X 上のホロノミー $\mathcal{D}$-加群の三角圏から X 上の実構成可能な強化型帰納層 ($\mathbb{R}$-constructible enhanced ind-sheaf) の三角圏への忠実充満関手が具体的に構成された。その後、望月氏によりその忠実充満関手の像が曲線テストという方法で特徴付けられた。

以上の研究背景のもとで、私は複素構成可能な強化型帰納層 ($\mathbb{C}$-constructible enhanced ind-sheaf) を以下のように定義し、それらのなす三角圏が上述の忠実充満関手の像に一致する事を示した (発表論文 [4])。つまり、上述の忠実充満関手がホロノミー $\mathcal{D}$-加群の三角圏と複素構成可能な強化型帰納層の三角圏の間に圏同値を誘導する事を証明した。通常の意味での層に対する複素構成可能性は、ある滑層分割が存在して各滑層上で有限階数の局所定数層であると定義される。一方で、強化型帰納層に対しては、X のある滑走分割が存在して各滑層上で有限階数の (強化型帰納層の意味での) 局所定数層かつその滑層の境界の各点で福原-Levelt-Turrittin 分解に対応するような良い分解をもつという条件で定義した。これはホロノミー $\mathcal{D}$-加群が同様の性質を持つ事から着想を得た。このようにして、上述の忠実充満関手の像に属する対象を滑層分割を用いて特徴付けることができた。

The higher dimensional case of the Riemann-Hilbert problem of whether there exists a one-to-one correspondence between Fuchsian differential equations and monodromies has been solved positively by Kashiwara in 1984. He established an equivalence of categories between the triangulated category of regular holonomic $\mathcal{D}$-modules on a complex manifold and the one of $\mathbb{C}$-constructible sheaves on it. The problem of extending this Kashiwara's result to cover the case of holonomic $\mathcal{D}$-modules with irregular singularities had been open for 30 years. After a groundbreaking development in the theory of Hukuhara-Levelt-Turrittin of the higher dimensional case by Kedlaya and Mochizuki, and the one of ind-sheaves by Kashiwara and Schapira, D'Agnolo and Kashiwara established the Riemann-Hilbert correspondence for irregular holonomic $\mathcal{D}$-modules. More precisely, they constructed a fully faithful functor from the triangulated category of holonomic $\mathcal{D}$-modules on a complex manifold to the one of $\mathbb{R}$-constructible enhanced ind sheaves on it. Moreover, Mochizuki proved that the image of this fully faithful functor can be characterized by the curve test. On the other hand, I defined a $\mathbb{C}$-constructible enhanced ind-sheaf as follows and proved that they are nothing but objects of the image of above fully faithful functor. Namely, above fully faithful functor induces an equivalence of categories between the triangulated category of holonomic $\mathcal{D}$-modules on a complex manifold and the one of $\mathbb{C}$-constructible enhanced ind-sheaves on it. A sheaf on a complex manifold is $\mathbb{C}$-constructible if there exists a stratification of it such that the restriction of the sheaf to each stratum is a locally constant sheaf of finite rank. As similarly, I define that an enhanced ind-sheaf on a complex manifold is $\mathbb{C}$-constructible if there exists a stratification of it such that the restriction of the enhanced ind-sheaf to each stratum is locally constant of finite type in the sense of enhanced ind-sheaves and has a good decomposition like the Hukuhara-Levelt-Turrittin decomposition along any point of the boundary of the stratum. The idea of this definition follows from the fact that any holonomic $\mathcal{D}$-module has the similar properties. So that we can characterized the image of above fully faithful functor by using stratifications.

B. 発表論文

1. Y. Ito: "Ind-$\mathscr{D}$-加群について–連接性と増大度付き Cauchy-Kovalevskaya-柏原の定理–", 東京大学修士論文, 2017.
2. Y. Ito and K. Takeuchi : "On Irregularities of Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules", preprint, arXiv:1801.07444, to appear in Adv. Math.
3. Y. Ito and K. Takeuchi : "On Some Topological Properties of Fourier Transform of Regular Holonomic $\mathcal{D}$-modules", preprint, arXiv:1807.09147, to appear in Canad. Math. Bull.
4. Y. Ito, $\mathbb{C}$-Constructible Enhanced Ind-Sheaves, preprint, arXiv:1910.09954, to appear in Tsukuba j. Math.

C. 口頭発表

1. 層とコホモロジー, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2015 年 8 月.
2. The Riemann-Hilbert correspondence for Holonomic systems (柏原 1984) の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2016 年 8 月.
3. A note on Coherent Ind-$\mathcal{D}$-modules and Cauchy-Kovalevskaya-Kashiwara Theorem with growth conditions, Algebraic Analysis and Representation Theory – In honor of Professor Masaki Kashiwara's 70th Birthday –, RIMS, Kyoto University, Japan, poster session, June 2017.
4. 論文「Equivariant Derived Category and Representation of Real Semisimple Lie Groups (柏原 2008)」の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2017 年 8 月.
5. regular holonomic D-module の Fourier 変換の irregularity について, 複素領域における関数方程式とその周辺, 広島大学, 2018 年 3 月.
6. 論文「N.M.Katz and G.Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, 1985」の紹介, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2018 年 8 月.
7. Fourier transforms of regular holonomic D-modules in higher dimensions, D-modules, quantum geometry and related topics, RIMS, Kyoto University, Japan, poster session, December 2018.
8. Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules in Higher Dimensions I, Hypergeometric functions and mirror symmetry, The University of Tokyo, Japan, December 2018.
9. Fourier Transforms of Regular Holonomic D-Modules in Higher Dimensions II, Hypergeometric functions and mirror symmetry, The University of Tokyo, Japan, December 2018.
10. ストークス現象について, Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis", 玉原セミナーハウス, 2019 年 8 月.