

特任研究員 (Project Researcher)

田内 大渡 (TAUCHI Taito)

A. 研究概要

H を実簡約代数群 G の実代数部分群とした時、次の三条件が同値であることが知られている。

- (i) $\dim \text{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が任意の G の滑らかな既約緩増加表現 π と H の有限次元表現に対して成り立つ。
- (ii) G の極小放物型部分群 P が G/H 上に開軌道を持つ。
- (iii) G/H 上の P 軌道の個数が有限である。

これを鑑みて G の一般放物型部分群 Q に対して次の三条件を考える。

- (i_Q) $\dim \text{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が任意の Q の滑らかな既約緩増加表現 η と H の有限次元表現に対して π が $C^\infty(G/Q, \eta)$ の既約商表現であるとき成り立つ。
- (ii_Q) Q が G/H 上に開軌道を持つ。
- (iii_Q) G/H 上の Q 軌道の個数が有限である。

(i_Q) と (ii_Q) の関係性、また (ii_Q) と (iii_Q) の関係性についてはすでに知られている。また昨年度までに (i_Q) から (iii_Q) に関しては向き付けに関する付加的な仮定の元で証明を与えることができ、(iii_Q) から (i_Q) に関しては H が可解群であるような反例を構成した。よって今年度は向き付けに関する仮定がない場合の (i_Q) から (iii_Q) の真偽、ならびに H が実簡約群である場合の (iii_Q) から (i_Q) の真偽を明らかにするという問題に取り組んだ。

また境界のないコンパクトリーマン多様体 M 上のオイラー方程式の解が M の体積要素 μ を保つ微分同相写像全体がなす無限次元リー群 $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ 上の測地線として実現されるという V. I. Arnol'd の方法により、 $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ の幾何構造が一つの重要な研究対象となっている。これに関して今年度 M があるコンパクトリー群の等質空間として実現される時、 $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ の曲率を表現論的な方法により計算できる公式を得ることができた。

Let G be a real reductive Lie group and H a real algebraic subgroup of G . Then, it is known that the following three conditions are equivalent:

- (i) $\dim \text{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ for any smooth admissible irreducible representation of G with moderate growth and any finite-dimensional representation of H ,
- (ii) A minimal parabolic subgroup P of G has an open orbit on G/H ,
- (iii) The number of P -orbit on G/H is finite.

More generally, we consider the following three conditions for a general parabolic subgroup Q of G :

- (i) $\dim \text{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ for any finite-dimensional representation η of Q and any finite-dimensional representation of H whenever π is isomorphic to an irreducible subquotient of $C^\infty(G/Q, \eta)$,
- (ii_Q) There exists an open Q -orbit on G/H ,
- (iii_Q) The number of Q -orbit on G/H is finite.

The relationship between (i_Q) and (ii_Q) and that between (ii_Q) and (iii_Q) are already known. By last year, I proved that the implication from (i_Q) to (iii_Q) is true under some additional condition of the orientation and constructed a counterexample, in which H is solvable, to the implication from (iii_Q) to (i_Q). Then, in this year, I considered the implication from (i_Q) to (iii_Q) without the condition of the orientation and that from (iii_Q) to (i_Q) in the case that H is reductive.

Let M be a compact Riemannian manifold and $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ the group of the volume preserving diffeomorphisms. Then, the geometric structure of $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ is important because there exists an one-to-one correspondence between solutions of the Euler equations on M and geodesics on $\mathcal{D}_\mu^s(M)$, which is observed by V. I. Arnol'd. In this year, a formula, which makes us enable to compute the curvature of $\mathcal{D}_\mu^s(M)$ by the representation theoretic method, is obtained for the case that M is a homogeneous space of a compact Lie group.

B. 発表論文

1. T. Tauchi : “実リー群の軌道と不変超関数の次元について”, 東京大学修士論文 (2016).
2. T. Tauchi : “退化主系列表現からの絡作用素の次元について”, 京都大学数理解析研究所講究録 **2031**, 表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題 (研究代表者: 青木茂先生) (2016), 1–14.
3. T. Tauchi : “等質空間上の軌道が無数個存在する場合の退化主系列表現の重複度について”, 京都大学数理解析研究所講究録 **2077**, 表現論とその周辺分野の広がり (研究代表者: 阿部紀行先生) (2017), 1–9.
4. T. Tauchi : The orbit decomposition of a flag variety over real and complex numbers, 京都大学数理解析研究所講究録, **2103** (2018), 表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題 (研究代表者: 久保利久先生), 76–85.
5. T. Tauchi : “Dimension of the space of the intertwining operators from degenerate principal series representations”, *Selecta Math. (N.S.)* **24** (2018), no. 4, 3649–3662.
6. 田内大渡, 大橋耕, 辻俊輔, 滝間太基, 早川拓, 山上遥航, 本間充, 宮田裕生, 松元崇, 岩淵由佳, 上坂正晃, レースコースの形状に対する最適化について, 数理科学実践研究レター, 東京大学大学院数理科学研究科, LMSR 2018–7, 1–4, 2018.
7. T. Tauchi : “Relationship between orbit decompositions on flag varieties and multiplicities of induced representations” (旗多様体上の軌道分解と誘導表現の重複度の関係性について), 東京大学博士論文 (2019).
8. T. Tauchi : リー群による軌道分解と不変超関数, 北海道大学数学講究録 **176**, 第 15 回数学総合若手研究集会: 数学の交叉点 (世話人: 福田一貴先生, 青木雅允先生, 植田優基先生, 上島芳倫先生, 矢不俊文先生, 新村貴之先生, 佐藤直飛先生, 豊川永喜先生, 松坂公暉先生, 山形颯先生, 吉田啓佑先生) (2019) 281–285.
9. T. Tauchi : “Relationship between orbit decomposition on the flag varieties and

multiplicities of induced representations”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **95** (2019), no. 7, 75–79.

10. T. Tauchi : A generalized uniformly bounded multiplicity theorem, 京都大学数理解析研究所講究録, **2139** (2019), 表現論とその周辺分野の進展 (研究代表者: 大島芳樹先生), 11–28.

C. 口頭発表

1. Dimension of invariant distributions, Berkeley-Tokyo Winter School “Geometry, Topology and Representation Theory”, アメリカ, University of California Berkeley 2016 年 2 月.
2. Dimension of the space of intertwining operators from degenerate principal series representations, “表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題”(研究代表者: 青木茂先生), 京都大学数理解析研究所, 2016 年 6 月.
3. 退化主系列表現からの絡作用素の次元について, 日本数学会秋季総合分科会, 関西大学千里山キャンパス, 2016 年 9 月.
4. Multiplicity of degenerate principle series with infinite orbits, “表現論とその周辺分野の広がり”(研究代表者: 阿部紀行先生), 京都大学数理解析研究所, 2017 年 6 月.
5. Multiplicity of degenerate principle series with infinite orbits, 龍谷表現論セミナー, 龍谷大学経済学部教育・研究センター, 2017 年 10 月.
6. 旗多様体の実数体上と複素数体上の軌道分解, “表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題”(研究代表者: 久保利久先生), 京都大学数理解析研究所, 2018 年 6 月.
7. リー群による軌道分解と不変超関数, 第 15 回数学総合若手研究集会: 数学の交叉点, (世話人: 福田一貴先生, 青木雅允先生, 植田優基先生, 上島芳倫先生, 矢不俊文先生, 新村貴之先生, 佐藤直飛先生, 豊川永喜先生, 松坂公暉先生, 山形颯先生, 吉田啓佑先生), 北海道大学, 2019 年 3 月.
8. Relationship between orbit decomposition on the flag varieties and multiplicities of

induced representations, 第 58 回 実函数論・函数解析学合同シンポジウム, (開催責任者 : 山崎教昭先生, 谷口健二先生, 廣島文生先生), 九州大学, 2019 年 8 月.

9. Existence of a conjugate point in the incompressible Euler flow on an ellipsoid, RIMS Gassuku-style Seminar “Physical and Mathematical Approaches to Geophysical Fluid Problems” (Organizers: Tsuyoshi Yoneda, Alex Mahalov, Nobu Kishimoto), Niseko Hilton Village, 2019 年 9 月.
10. Relationship between Orbit Decomposition on the Flag Varieties and Multiplicities of Induced Representations, Workshop on “Integral Geometry, Representation Theory and Complex Analysis”, KAVLI Institute of Physics and Mathematics of the Universe, 2020 年 1 月.

F. 対外研究サービス

1. 日本応用数理学会 2019 年度年会実行委員会 実行委員.