数理科学特別講義 **I**

等質錐と等質ジーゲル領域

野村隆昭（九州大学大学院数理学研究院）

本講義は，E. Cartan の問題「$n \geqq 4$ のとき，$\mathbb{C}^n$ に非対称な等質有界領域が存在するか」に肯定的な解答を与えた等質ジーゲル領域（$\mathbb{C}$ の上半平面の高次元化），及び等質開凸錐に関するものである．私や名古屋大学の伊師英之氏，金沢大学の甲斐千舟氏の近年の結果（共同あるいは私や彼ら自身の単独研究），特に対称領域の特徴付けに関する結果の解説を中心に講義をするが，そこで用いられる基本的な概念や代数的構造物については，例と共に詳しく述べる．定理についても，完全な証明を与えることより，むしろ例を通して理解するというような方針で進めたい．

講義内容についてのキーワードをいくつか箇条書きにすると ...

(1) 正規 j 代数（Piatetski-Shapiro 代数）
— ジーゲル領域に単純推移的にアフィン変換で作用する分裂可解リー群のリー代数

(2) （ユークリッド型及び複素半単純）ジョルダン代数

(3) （エルミート型）ジョルダン 3 重系

(4) Vinberg の意味でのクラン（コンパクト正規左対称代数）
— 以上の (1)~(4) は，等質領域の接空間に定義される代数的構造物ということで捉えることができる．相互の関係についても述べる．

(5) 等質錐に付随する擬逆元写像
— 行列にその逆行列を対応させるという写像の一般化

(6) 等質ジーゲル領域のケイリー変換
— 上半平面を単位円の内部に写す変換 $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ の高次元化で，(5) の擬逆元写像を用いて定義される．対称領域の場合は，パラメタを適当に選べば，Korány–Wolf によって導入された，エルミート対称空間の Harish–Chandra モデルを，その非有界モデルであるジーゲル領域に写す変換の逆変換に等しくなる．

(7) 等質錐に付随する基本相対不変式
— 行列の首座小行列式の一般化にあたる

(8) ジョルダン代数の表現と準対称ジーゲル領域

講義を進める上で，線型リー群やリー代数の基本的な所はある程度仮定せざるをえないが，一般論の知識は，それがなくても概ね理解できるように進める予定である．