1

○ まくら，1. 構成．2 応用．

余接空間

$= \mathrm{Spec}\, A$ $A = k[T_1, \dots T_n]$.

k 完全体．X/k smooth variety 次元 n

$x \in X$ closed pt．$m \subset A$ 極大イデアル．

余接束 T^*X の x での fiber $= m/m^2$.

$\eta \in X$ generic pt $K = \mathrm{Frac}\, A$.

T^*X の η での fiber $\Omega^1_{K/k}$.

$p \in X$ T^*X の p での fiber．$k(p)$-v.sp dim n

$k(p) = \mathrm{Frac}\, A/p$

$$0 \to p/p^2 \otimes k(p) \longrightarrow T^*X|_p \longrightarrow \Omega^1_{k(p)/k} \to 0$$

A_p p での局所環

$$T^*X|_p = \Omega^1_{A_p/k} \otimes_{A_p} k(p)$$

問題 A (ネーター) 局所環 $k = A/m$ 剰余体．$\mathrm{ch}\, k = p > 0$

k-線形空間 Ω と 完全系列

$$0 \to m/m^2 \to \Omega \longrightarrow \Omega^1_{k/\mathbb{F}_p} \to 0$$

を自然に構成できるか？

$p \in m^2$ のときは

$$\Omega = \Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \otimes_A k \quad \text{とすれば良い}$$

$$= \Omega^1_{(A/m^2)/\mathbb{F}_p} \otimes_{(A/m^2)} k.$$

$p \notin m^2$ のときは? e.g. $A = \mathbb{Z}[T]_{(p)}$ $k = \mathbb{F}_p(T)$

$\Omega^1_{k/\mathbb{F}_p} \neq 0$

$$\dim \Omega^1_{A/\mathbb{Z}} \otimes_A k = 1. \quad \boxed{dp = 0}$$

1 構成. Dupuy-Katz-Rabinoff-Zureick-Brown

$R \to A$ 環の射. Gabber-Ramero.

Ω^1_A の定義の復習 cf. Kato

M A加群.

$d: A \to M$ が R上のderivationとは

1 dは R-linear.

2. Leibniz rule

$$d(ab) = a\,db + b\,da.$$

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M) = \mathrm{Der}_R(A, M)$$

A local

単射とは限らない

$$m/m^2 \to \Omega^1_{A/\mathbb{Z}_{(p)}} \otimes k \to \Omega^1_{k/\mathbb{F}_p} \to 0$$

A 環 $\quad p$ 素数

$M \quad A$加群.

$w: A \to M$ が Frobenius-Witt derivation とする

$$w(x+y) = wx + wy - P(x,y)w(p)$$

$$P(X,Y) = \frac{1}{p}\left((X+Y)^p - X^p - Y^p\right) \in \mathbb{Z}[X,Y]$$

$$w(xy) = x^p w(y) + y^p w(x)$$

例 $\quad A = \mathbb{Z} \quad M = p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$

$w: A \to M.$

$$x - x^p = w(x)$$

$$(x+y) - (x+y)^p = (x - x^p) + (y - y^p) - \frac{1}{p}\left((x+y)^p - x^p - y^p\right) \cdot p$$

$$xy - x^p y^p = x^p(y - y^p) + y^p(x - x^p) + (x - x^p)(y - y^p)$$

$F\Omega_A$ FW微分形式の加群.

$$\mathrm{Hom}_A(F\Omega_A, M) = \mathrm{FWDer}(A, M)$$

$w : A \to M$ FW derivation

A $\mathbb{Z}_{(p)}$上の環とする $\Rightarrow$ $p\text{-}w = 0$

$F\Omega_A$ A/pA加群.

$w(na) = nw(a) + a^p w(n)$

$\downarrow$

$(n - n^p) w(a) = 0$

$\mathrm{ord}(p - p^p) = 1.$

A $\mathbb{F}_p$上の環とする

$$F\Omega_A = \Omega^1_{A/\mathbb{F}_p} \otimes_{A, F} A$$

$$= F^* \Omega^1_{A/\mathbb{F}_p}.$$

A $\mathbb{Z}_{(p)}$上の局所環.

$$0 \to F^*(m/m^2) \to F\Omega_A \otimes_A k \to F^*\Omega^1_{k/\mathbb{F}_p} \to 0$$

exact

例 $F\Omega_{\mathbb{Z}_p} = F\Omega_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$

$$w : F\Omega_{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\sim} p\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2$$

$$wx \longmapsto x - x^p$$

2 応用 分岐群

K 完備離散付値体

L 有限次 Galois 拡大

$G = Gal(L/K)$

$G_i = \ker(G \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{O}_L/m_L^i)$

$G_1 = I$

下完全体

上つき分岐群 $\varphi : \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$

$\varphi_{L/K}$

$G^{\varphi(i)} = G_i$.　　Herbrand fn

F 一般

定理. G の filtration $(G^r)_{r>0,\, r\in\mathbb{Q}}$ で
K の任意の拡大体 K' で次の条件をみたす
ものに対し $L' = LK'$, $G' = Gal(L'/K')$.
とおくと 標準単射 $G' \to G$ が

すべての $v>u$, $v\in\mathbb{Q}$ に対し同形

$$G^v \longrightarrow G'^v$$ をひきおこすものが

ただ1つ存在する

条件 $\bar F \to \bar F'$ を剰余体の射 $F=O_K/m_K \to F'=O_{K'}/m_{K'}$

の射を誘導する代数閉包の射とすると、

$$F\supset O_K \otimes_{O_K} \bar F \longrightarrow F\supset O_{K'} \otimes_{O_{K'}} \bar F'$$

は単射であり、$\bar F'$ は完全体である。

注意 行き先の次元は1. だから $\bar F'$ は $\bar F$ の無限次拡大なので単射でもおかしくない.

証明. (条件)をみたす K' の構成

・Abbes-Saito の $\mathcal{F}$ が定理の条件をみたす.

系 $G_r = G^r/G^{r+}$ $r>0$ は $\mathbb{F}_p$-v.sp.

$$G^{r+} = \bigcup_{s>r} G^s$$