ℓ 進層の特性サイクル

(Characteristic cycle of an ℓ-adic sheaf)

斎藤　毅　(東京大学)*

概　　要

For an ℓ-adic sheaf on a smooth variety over a perfect field, its characteristic cycle is defined as a $\mathbf{Z}$-linear combination of irreducible components of the singular support, defined by Beilinson as a closed conical subset of the cotangent bundle. It gives an analogue of that defined by Kashiwara-Schapira in a transcendental setting. We discuss its properties, including the index formula and the relation with the MacPherson Chern class.

複素多様体 X 上の $\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対し，その特性サイクル $CC\mathcal{M}$ が余接束 T^*X 上に定義される．柏原-Schapira[7] によれば，構成可能層 $\mathcal{F}$ の特性サイクル $CC\mathcal{F}$ が Riemann-Hilbert 対応を経由せずに位相的に構成される．正標数の完全体 k 上のスムーズな代数多様体 X 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ に対しても，特性サイクル $CC\mathcal{F}$ が余接束 T^*X 上に定義されることが期待されていた．

Beilinson は $\mathcal{F}$ の特異台 $SS\mathcal{F}$ を余接束 T^*X の錐閉集合 $C=\bigcup_a C_a$ で各既約成分 C_a の次元が X の次元に等しいものとして定義した [2]．これは，$\mathcal{F}$ の局所非輪状性を統制するものとして定義される．特性サイクル $CC\mathcal{F}$ は $SS\mathcal{F}$ の整数係数の線形結合 $\sum_a m_aC_a$ である [10]．これは，代数曲線への射に関する $\mathcal{F}$ の消失輪体の全次元についての Milnor 公式で特徴づけられる．これらの定義の詳細は省略する [2], [10]．

k は標数 $p \geqq 0$ の完全体とし，Λ を標数 ℓ が p とは異なる有限体とする．X のエタール位相に関する Λ 加群の構成可能な複体を，以下単に X 上の層とよぶ．X 上の ℓ 進層の法 ℓ 還元は，X 上の層を定めるので，以下の話は ℓ 進層に適用できる．

1. 例

1.1. 曲線の場合

X を k 上のスムーズな連結代数曲線とし，$U=X-D$ を因子 D の補開部分スキームとする．$\mathcal{F}$ を X 上の層で U 上局所定数層であるものとし，rank $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の U への制限の階数とする．D の点 x に対し，Artin 導手を

$$a_x\mathcal{F} = \mathrm{rank}\ \mathcal{F} - \dim \mathcal{F}_{\bar{x}} + \mathrm{Sw}_x\mathcal{F} \in \mathbf{Z}$$

で定める．ここで，$\mathcal{F}_{\bar{x}}$ は x の上にある幾何的点 $\bar{x}$ でのストークであり，Swan 導手 $\mathrm{Sw}_x\mathcal{F} \in \mathbf{N}$ は x での局所体の絶対 Galois 群の $\mathcal{F}$ が定める表現 V_x の暴分岐の不変量である [15]．$\mathrm{Sw}_x\mathcal{F}=0$ は V_x が馴分岐であることと同値である．

本研究は科研費 (課題番号: (A) 26247002) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14F20
キーワード：特性サイクル, エタール・コホモロジー，指数公式
* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: t-saito@ms.u-tokyo.ac.jp
web: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/

rank $\mathcal{F} \neq 0$ かつ各 $x \in D$ の近傍で $\mathcal{F}$ が局所定数層でなければ，$\mathcal{F}$ の特異台は余接束 T^*X の 0 切断と $x \in D$ でのファイバーの合併

$$SS\mathcal{F} = T^*_X X \cup \bigcup_{x \in D} T^*_x X$$

である．$\mathcal{F}$ の特性サイクルは

$$CC\mathcal{F} = -\Big(\mathrm{rank}\ \mathcal{F} \cdot T^*_X X + \sum_{x \in D} a_x \mathcal{F} \cdot T^*_x X\Big) \tag{1}$$

である．

1.2. 馴分岐の場合

X を k 上のスムーズな n 次元スキームとし，D を X の単純正規交叉因子とする．$\mathcal{G} \neq 0$ を $U = X - D$ 上の局所定数層で D に沿って馴分岐なものとし，$j\colon U \to X$ を開うめこみとする．D の既約成分を $D_1, \ldots, D_m$ とする．添字の集合 $I \subset \{1, \ldots, m\}$ に対し，$X_I = \bigcap_{i \in I} D_i$ は X の余次元 $\sharp I$ のスムーズな閉部分スキームであり，その余法束 $T^*_{X_I}X$ は X_I 上の階数 $\sharp I$ のベクトル束だから $\dim T^*_{X_I}X = n$ である．$I = \varnothing$ なら $X_\varnothing = X$ であり，余法束 $T^*_X X$ は 0 切断である．

$\mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ の特異台は，余法束の合併

$$SS\mathcal{F} = \bigcup_I T^*_{X_I}X$$

である．$\mathcal{F}$ の特性サイクルは

$$CC\mathcal{F} = (-1)^n \mathrm{rank}\ \mathcal{G} \cdot \sum_I T^*_{X_I}X \tag{2}$$

である [16].

以上の例では特異台は T^*X の Lagrangean な閉部分集合だが，一般にそうとは限らない．

2. 性質

2.1. 加法性と正値性

特性サイクルについては層の完全三角 $\to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to$ に関する加法性

$$CC\mathcal{F} = CC\mathcal{F}' + CC\mathcal{F}''$$

がなりたつ．倒錯層 $\mathcal{F}$ に対しては $CC\mathcal{F} = \sum_a m_a C_a$ の係数 m_a はすべて > 0 である．

2.2. 指数公式

X が n 次元なら余接束 T^*X の次元は $2n$ であり，0 切断 $T^*_X X = X$ と特異台 $SS\mathcal{F} = \bigcup_a C_a$ の既約成分 C_a の次元はどちらも n なので，さらに X がプロパーと仮定すれば交点数 $(CC\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X}$ が定義される．k の代数閉包を $\bar{k}$ で表す．Euler-Poincaré 標数は交代和 $\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2n} (-1)^q \dim H^q(X_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ である．

定理 1 X が射影的ならば

$$\chi(X_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = (CC\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X}$$

がなりたつ．

X が代数曲線の場合には，指数公式は Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式 [4] である．一般の場合はそれに帰着させて証明する．

2.3. 積と逆像

X, Y をスムーズなスキーム，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ X, Y 上の層とすると，$X \times Y$ 上の外部積 $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$ にたいし，

$$CC(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) = CC\mathcal{F} \times CC\mathcal{G} \tag{3}$$

がなりたつ [11]．

$h\colon W \to X$ をスムーズなスキームの射とする．h がスムーズならば X 上の層 $\mathcal{F}$ のひきもどし $h^*\mathcal{F}$ に対して

$$CCh^*\mathcal{F} = h^!CC\mathcal{F} \tag{4}$$

がなりたつ．右辺は標準射 $T^*X \leftarrow W \times_X T^*X \to T^*W$ を代数的対応と考えて交点理論を使って定義するが，詳細は省略する．(4) は (3) の特別な場合から導かれる．これも指数公式の証明のなかで使われる．

h がうめこみの場合は，(4) のような式は一般にはなりたたないが，特異台と適切に横断的に交わるという条件を課せばなりたつことが示せる．これも指数公式の証明で使われる．

2.4. 順像

$f\colon X \to Y$ を k 上のスムーズなスキームの射で $\mathcal{F}$ の台上プロパーなものとする．$m = \dim Y$ とおき，$\mathrm{CH}_\bullet$ で代数的サイクルの有理同値類のなす群を表す．標準射 $T^*X \leftarrow X \times_X T^*Y \to T^*Y$ を代数的対応と考えることにより，T^*Y の閉錐部分集合 $f_\circ SS\mathcal{F}$ が定義される．さらに順像 $f_!CC\mathcal{F}$ が交点理論を使って $\mathrm{CH}_m(f_\circ SS\mathcal{F})$ の元として定義される．これも詳細は省略する．

予想 2 k 上のスムーズなスキームの射 $f\colon X \to Y$ が $\mathcal{F}$ の台上プロパーならば，X 上の層 $\mathcal{F}$ の順像 $Rf_!\mathcal{F}$ に対して

$$CCRf_!\mathcal{F} = f_!CC\mathcal{F} \tag{5}$$

がなりたつ．

定理 1 は $Y = \mathrm{Spec}\ k$ で X が Y 上射影的な場合にあたる．$\dim f_\circ SS\mathcal{F} = m$ のときは (5) はサイクルの等式になる．

$\dim Y = \dim f_\circ SS\mathcal{F} = 1$ とする．(1) より，(5) は Artin 導手 $a_y Rf_!\mathcal{F}$ に関する等式となる．$\dim X = 1$ かつ f が生成点ではエタールとすると，これは Artin 導手の誘導公式である [14]．$\dim X = 2$ かつ f の生成ファイバーがスムーズな場合も，(5) を証明できる [12]．

3. 特性類

3.1. 構成

X を k 上スムーズとは限らない有限型のスキームとし，k 上スムーズなスキーム M への閉うめこみ $i\colon X\to M$ があるとする．X 上の層 $\mathcal{F}$ の順像の特性サイクル $CCi_*\mathcal{F}$ の射影完備化の有理同値類は，M や $i\colon X\to M$ によらない元 $cc_X\mathcal{F}\in \mathrm{CH}_\bullet(X)$ を定める．これを $\mathcal{F}$ の特性類とよぶ．これは複素多様体上の $\mathcal{D}$ 加群の特性類の構成 [3] の類似である．コホモロジー的な特性類 [1] や層の分岐が定める Swan 類 [8] との関係が予想されるがわかっていない．

3.2. MacPherson の Chern 類

X 上の層の圏の Grothendieck 群を $K(X,\Lambda)$ とすると，$\mathcal{F}$ の類を特性類 $cc_X\mathcal{F}$ にうつす射

$$cc_X\colon K(X,\Lambda)\longrightarrow \mathrm{CH}_\bullet(X) \tag{6}$$

が定まる．$F(X)$ を X 上の $\mathbf{Z}$ 値構成可能関数のなす加群とし，$\mathrm{rank}\colon K(X,\Lambda)\to F(X)$ を各幾何的点でのファイバーの次元が定める射とする．

k が標数 0 ならば，MacPherson の Chern 類 [9] $c_M\colon F(X)\to \mathrm{CH}_\bullet(X)$ を次数 q では $(-1)^q$ 倍したものを $(-1)^\bullet c_M$ とすると，可換図式

$$\begin{tikzcd} K(X,\Lambda) \arrow[r, "cc_X"] \arrow[d, "\mathrm{rank}"'] & \mathrm{CH}_\bullet(X) \\ F(X) \arrow[ur, "(-1)^\bullet c_M"'] & \end{tikzcd} \tag{7}$$

が得られる．

3.3. Riemann-Roch 公式？

$p>0$ の場合には，図式 (7) を可換にする斜めの射は存在しない．k 上分離有限型スキームから X への射のなす圏 $\mathcal{V}_X$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{V}_X)$ の双対を $\widetilde{F}(X)=\mathrm{Hom}(K_0(\mathcal{V}_X),\mathbf{Z})$ とし，双線形写像 $K(X,\Lambda)\times K_0(\mathcal{V}_X)\to \mathbf{Z}\colon (\mathcal{F},[g\colon Z\to X])\mapsto \chi_c(Z_{\bar{k}},g^*\mathcal{F})$ が定める線形写像 $K(X,\Lambda)\to\widetilde{F}(X)$ の核を $K(X,\Lambda)_0$ とすると，(6) は

$$K(X,\Lambda)/K(X,\Lambda)_0\to \mathrm{CH}_\bullet(X) \tag{8}$$

をひきおこす [13].

Grothendieck は射 (6) の存在とそのプロパー射による順像との両立性を，離散係数に対する Riemann-Roch 公式として SGA5 での未公刊の講義中で予想した [5]．和訳 [6] にしかない注に，$p>0$ の場合には簡単な反例がありこの予想は成立しないことが書かれている．

予想 2 は，次数 0 の部分についてプロパー射 $f\colon X\to Y$ に対し可換図式

$$\begin{array}{ccc} K(X,\Lambda) & \xrightarrow{cc_{0,X}} & \mathrm{CH}_0(X) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K(Y,\Lambda) & \xrightarrow{cc_{0,Y}} & \mathrm{CH}_0(Y) \end{array} \tag{9}$$

を導く．これは上記の反例とは矛盾しない．

参考文献

[1] A. Abbes, T. Saito, *The characteristic class and ramification of an l-adic étale sheaf*, Inv. Math. 168 (2007) 567-612.

[2] A. Beilinson, *Constructible sheaves are holonomic*, `arxiv:1505.06768` to appear at Selecta Math.

[3] V. Ginsburg, *Characteristic varieties and vanishing cycles*, Inv. Math. 84 (1986), 327–402.

[4] A. Grothendieck, rédigé par I. Bucur, *Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale*, Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L, SGA 5, Springer Lecture Notes in Math. 589. (1977), 372-406.

[5] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles, Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien,* `http://lipn.univ-paris13.fr/~duchamp/Books&more/Grothendieck/RS/pdf/RetS.pdf`.

[6] A. グロタンディーク, 数学と裸の王様　ある夢と数学の埋葬 (収穫と蒔いた種と)，日本評論社，新装版 (2015).

[7] M. Kashiwara, P. Schapira, SHEAVES ON MANIFOLDS, Springer-Verlag, Grundlehren der Math. Wissenschaften 292, (1990).

[8] K. Kato, T. Saito, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, Ann. of Math. 168 (2008), 33–96.

[9] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties,* Ann. of Math. 100 (1974), 423–432.

[10] T. Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, `arXiv:1510.03018`, Inventiones Math., published on line.

[11] T. Saito, *Characteristic cycle of the exterior product of constructible sheaves,* `arXiv:1607.03157`, preprint

[12] T. Saito, *On the proper push-forward of the characteristic cycle of a constructible sheaf,* `arXiv:1607.03156`, preprint

[13] T. Saito, Y. Yatagawa, *Wild ramification determines the characteristic cycle*、`arXiv:1604.01513`, preprint

[14] J-P. Serre, CORPS LOCAUX, Hermann, Paris, 1968.

[15] J-P. セール，有限群の線型表現，岩波書店 (1974) 品切.

[16] E. Yang, *Logarithmic version of the Milnor formula,* accepted for publication at Asian Journal of Mathematics.