

集合が現代数学の基礎 なのはどうか

斎藤 毅（理学部 数学科）

5/16(金) 17:30～18:30

現代数学の基礎は集合

- ・ 集合とは ものの集まり
- ・ 数学科では
最初の必修科目が 「集合と位相」

どうしてそうなのか？



斎藤毅 集合と位相

東京大学出版会 2009

数学と理科（自然科学）の違いと関係

理科の対象は現実の世界にある

- ・物理学 物体、電子、宇宙、素粒子、…
- ・化学 塩酸、メタノール、分子、イオン、…
- ・生物学 動物、細胞、ウイルス、遺伝子、…
- ・地学 地層、火山、鉱物、プレート、…

数学と理科（自然科学）の違いと関係

理科の対象は現実の世界にある

数学との関係

現実の世界に現れる現象を抽象化して

- ・ 既存の数学を適用する
- ・ 新しい数学を発見する

数学と理科（自然科学）の違い

- ・ 理科の対象は現実の世界にある
- ・ 数学の対象は
数、図形、関数、...

これらはどこにあるのか

数学の対象はどこにあるのかー 1 数

数は現実の世界にあるか？

- ・ものの個数から 自然数へ 抽象化
- ・ものの長さ、量から 実数へ 抽象化

$\sqrt{2}$ は実数だが有理数ではない 古代ギリシャ

数の体系とその拡張

自然数、整数、有理数、実数、複素数

- ・ 実数とは何か 直線上の点？
- ・ 現実の世界を数学の基盤とできないのなら
何を基礎とすればよいのか？
- ・ ほかの拡張のしかたはないのか
- ・ 数の体系とはそもそも何か？

数学の対象はどこにあるのかー 2 図形

図形は現実の世界にあるか？

紙の上に三角形や円を書けるか？

紙は平面か？

現実の世界を理想化、抽象化 幾何学の対象

平行線の公理は？

数学の問題か物理学の問題か？

幾何学の対象

- ・ ユークリッド幾何学と違う幾何学がある
「2次元平面や3次元空間とは違う空間を考えることができる。

そしてそれこそがこれからの幾何学の対象」
幾何学の基礎をなす仮説について

リーマン 1854.6.10

- ・ その幾何学の対象はどこにあるのか

幾何学の基礎をなす仮説について リーマン 1854

「2次元平面や3次元空間とは違う空間を考えることができる。

そしてそれこそがこれからの幾何学の対象」



集合を基礎とすればー 1 数の体系

・ 自然数 集合として実現

$0 = \{ \}$ 空集合, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $\dots$

フォンノイマン 1923

・ 数の体系 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

集合として記述 $Z = \{ n - m \mid n \text{ と } m \text{ は自然数} \}$,

$Q = \{ \frac{n}{m} \mid n \text{ と } m \neq 0 \text{ は整数} \}$

集合を基礎とすればー 1 数の体系

- ・ 実数是有理数を基礎として定義できる
デデキント 1872
- ・ $\sqrt{2}$ とは 集合
 $\{r \mid r \text{ は } \sqrt{2} \text{ より小さい有理数}\}$
 $= \{r \mid r < 0 \text{ または } r^2 < 2 \text{ をみたす有理数}\}$

集合を基礎とすればー 1 数の体系

- ・ 実数は有理数を基礎として定義できる
デデキント 1872
- ・ ほかの数の体系も集合として構成できる
p進数の発見 (pは素数)
ヘンゼル 1904-08

集合を基礎とすればー 2 幾何学の対象

- ・ 集合（と位相）を基礎とすれば
リーマンが考えた空間（多様体）
を構成できる
- ・ 実数を n 個ならべれば
 n 次元空間 集合 $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \text{ は実数}\}$
の点を表すことができる

集合を基礎とすればー 2 幾何学の対象

- ・ 集合（と位相）を基礎とすれば
リーマンが考えた空間を構成できる
- ・ 直線の延長上に一点を付け加えると
円ができる
- ・ このような構成は集合を使えば何次元でも
考えられる・・・新しい空間の構成

数学の発展の原動力は？

- ・ 新しい対象の発見
ふつうの平面や空間とは違う空間、
p進数、...
- ・ 抽象化、一般化

集合はそれを支えている

参考文献

- ・ 斎藤毅 集合と位相 東京大学出版会 2009
- ・ 斎藤毅 抽象数学の手ざわり 岩波書店 2021

