三角関数とは何か

斎藤　毅

三角関数の性質を網羅的に列挙しようというのではない．逆に，三角関数がみたす性質として何をとりあげれば，ほかのものをすべて導きだせるのかという話をしていく．要するに三角関数をどう定義するかということだが，そんなことは高校で教わったと思う人もいるだろう．だが『解析概論』の序文にもあるとおり，そう単純なことではないということの確認から始めよう．

「一例として指数関数，三角関数を取ってみる．彼等は初等解析において王位を占めるものであるが，その古典的導入法は，全く歴史的，従って偶発的で，すこぶる非論理的と言わねばなるまい．さて解析概論において，その歴史的発生を無視することが許されないとするならば，これらの函数の合理的導入法を述べる上に，古典的導入法が偶発的である所以をも説くことが，解析概論に課せられる迷惑な任務というものであろう.」（高木貞治『解析概論』第一版緒言より）

1．古典的導入法　高校の数学での三角関数 $\cos\theta, \sin\theta$ の定義を簡単に復習しよう．$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．xy 平面上の原点 $O(0,0)$ を中心とする半径 1 の円 C の $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の部分を C_+ とする．A を点 $(1,0)$ とし，C_+ 上の点 $P(x,y)$ を，角 AOP が θ となるようにとる．弧度法によれば，角 AOP が θ であるとは，弧 AP の長さが θ ということである．このとき，$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$ として三角関数 $\cos\theta,\ \sin\theta$ を定義する．

図 1

ここで復習した定義に間違いがあるわけではないが，よくみると不十分な点が目につく．弧 AP の長さとは何だろうか．実数 $0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対し，弧 AP の長さが θ となる C_+ の点 P が存在するのはなぜだろうか．

高校での三角関数の定義を完成するには，円の弧の長さの定義とその性質のほかにも準備しなくてはいけないことがたくさんある．その話にはあとで戻ってくるが，それなら別の方法で定義できないのか，という気になってくる．それが『解析概論』の序文にいう「合理的導入法」ということである．

2．等速円運動　高校の数学で三角関数の性質をたくさん学ぶが，その中

でもとくに大切なのが加法定理

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{1}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

と微分の公式

$$\cos' x = -\sin x,\ \sin' x = \cos x \tag{2}$$

である．微分の公式だけでは三角関数の定義にならないが，これに

$$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0 \tag{3}$$

を合わせると，三角関数の定義として十分な条件になる．定理として書くと，次のようになる．

定理 1　すべての実数に対して定義された微分可能な関数 $f(x), g(x)$ で，

$$f'(x) = -g(x),\ g'(x) = f(x) \tag{4}$$
$$f(0) = 1,\ g(0) = 0$$

をみたすものがただ 1 組存在する．

定理 1 を使ってよいことにすれば，(4) をみたすただ 1 組の $f(x),\ g(x)$ を $\cos x, \sin x$ とよぶことで，三角関数の定義になる．

方程式 (4) の意味を考えてみる．(4) より，$(f(x)^2+g(x)^2)' = 2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x) = -2f(x)g(x) + 2g(x)f(x) = 0$ となるから，$f(x)^2 + g(x)^2$ は定数関数で，その値は $x = 0$ とおけば 1 である．よって，公式

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{5}$$

が得られた．さらに $(x, y) = (f(t), g(t))$ を曲線のパラメータ表示と考えれば，接ベクトル $(f'(t), g'(t))$ の長さは $f'(t)^2+g'(t)^2 = (-g(t))^2+f(t)^2 = 1$ の平方根 1 だから，$(x, y) = (f(t), g(t))$ は曲線

$$x^2 + y^2 = 1$$

上を速さ 1 で動く点の座標を表わしている．

パラメータつきの曲線の長さを積分で表わす公式を使えば，$0 \leqq t \leqq a$ の部分の長さは

$$\int_0^a \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}dt = \int_0^a dt = a$$

となる．このように微分方程式 (2) と (3) を定義とすれば，それから高校での定義の性質を導くことができる．

3．微分方程式から加法定理へ　定理 1 を少し一般化しておけば，加法定理を導ける．

系 2 すべての実数に対して定義された微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が，

$$f'(x) = -g(x),\ g'(x) = f(x) \tag{6}$$

をみたすならば，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)\cos x - g(0)\sin x, \\ g(x) &= f(0)\sin x + g(0)\cos x \end{aligned} \tag{7}$$

である．

[系 2 の証明] 三角関数を成分とする行列

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \tag{8}$$

は，(5) より回転行列である．(7) を行列 $R(x)$ を使って書けば

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = R(x) \begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる．(9) の左辺に回転行列 $R(x)$ の逆行列

$${}^tR(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

をかけて得られるベクトル

$${}^tR(x) \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \tag{10}$$

の成分の微分は，(6) と (2) を使って計算すれば両方とも 0 である．よってベクトル (10) は定数ベクトルであり，$x = 0$ とおけばその値は $\begin{pmatrix} f(0) \\ g(0) \end{pmatrix}$ である．これに行列 $R(x)$ をかければ，(9) したがって (7) が得られる．

[加法定理の証明] c を実数とする．$f(x) = \cos(x+c)$, $g(x) = \sin(x+c)$ は方程式 (6) をみたす．$f(0) = \cos c$, $g(0) = \sin c$ だから，系 2 より加法定理 (1) が得られる．

(2) と (3) で三角関数を定義するのは数学者好みで，微分の公式も定義より明らかとなるので結構なのだが，問題は定理 1 の証明がそう簡単ではないことである．定理 1 は常微分方程式の解の存在と一意性の特別の場合だが，微分方程式を勉強するまで三角関数が使えないのでは不便すぎる．

4. オイラーの公式

$$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \tag{11}$$

のことである．定理 1 の証明はともかく，(2) と (3) をみたすただ 1 つのものとして定義するというのでは，なんとなくすっきりしないという人もいるだろう．それならばオイラーの公式で (2) の解を構成してしまえばよいということになる．

そのためには (11) の左辺の指数関数を定義しなくてはならないが，ここでは巾級数を使って

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{12}$$

で定義する．この x に $\sqrt{-1}x$ を代入して，実部と虚部にわければ，

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{13}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

が得られる．(13) を三角関数の定義とすれば，オイラーの公式 (11) は定義より明らかということになる．

(13) を定義とよぶためには，(13) の右辺がすべての実数 x に対して収束することを示さなくてはならない．(12) の右辺の巾級数に収束半径を求めるダランベールの公式を適用すれば，(12) の右辺はすべての実数 x に対して収束することがわかる．(12) の右辺を (13) の右辺についての優級数と考えることで，(13) の右辺もすべての実数に対して収束することがしたがう．

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ は (13) より明らかだが，微分の公式 (2) を示すには，収束する巾級数については項別微分ができるという定理を使うこと

になる．とすると，巾級数の項別微分ができるまで三角関数が微分できないことになるが，それも困った話である．

5．逆三角関数の逆関数　というわけで，合理的導入法といってもそれぞれ一般論をだいぶ積み重ねる必要がある．それなら「古典的導入法」を地道に完成させるのも悪くないのではという気になってくる．曲線の長さをどう定義するかが問題だが，ここでは連続微分可能な関数 $f(x)$ のグラフの長さを積分

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{14}$$

で表わす公式を使うことにする．

図 1 の x と y の役割をいれかえるか直線 $x=y$ で折り返して，$0 \leqq p \leqq 1$ として円 $x^2+y^2=1$ の $0 \leqq x \leqq p,\ y \geqq 0$ の部分 AP の長さ $l(AP)$ を考える．

図 2

長さの公式 (14) で $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ とおいて積分のなかみを計算すると，

$$l(AP)=\int_0^p \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{15}$$

となる．ただし，$p=1$ のときは (15) の右辺は広義積分となる．この方法では円周率を

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{16}$$

で定義する．

弧（アーク） AP の長さ $l(AP)$ を $\arcsin p$（アークサイン）とおくことで，$0 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $\arcsin x$ が定まる．(15) より

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{17}$$

である．式 (17) は分母の平方根のなかみを t の 3 次式や 4 次式でおきかえることで楕円関数論の出発点となった由緒正しいものである [3].

式 (17) で，$\arcsin x$ の定義域を $-1 \leqq x \leqq 1$ にひろげておく．$\arcsin x$ の定義 (17) より，$\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ だから，$\arcsin x$ は $-1 \leqq x \leqq 1$

で単調増加である．$\arcsin x$ の値の範囲は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから，逆三角関数 $\arcsin x$ の逆関数として三角関数 $\sin x$ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義される．$\cos x$ も $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ で定義すると，逆関数の微分の公式 $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ より

$$\sin' x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$$

が得られる．$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ だから，$2\cos x \cos' x + 2\sin x \cos x = 0$ で，$\cos' x = -\sin x$ も得られる．

こうすると，三角関数を逆三角関数の逆関数として定義している．高校では，微分が $f(x)$ になる関数として $f(x)$ の不定積分を定義したが，(17) では新しい関数を積分として定義している．これも正当化する必要がある．

さて，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では $\cos x, \sin x$ が定義されて微分の公式 (2) をみたすことがわかったとしても，定義域を実数全体にひろげないといけない．これには，整数 n に対し $n\pi - \dfrac{\pi}{2} \leqq n\pi + x \leqq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ では

$$\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos x,\ \sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x \tag{18}$$

で定義するという方法や，自然数 $n \geqq 1$ に対し $-n \cdot \dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq n \cdot \dfrac{\pi}{2}$ では

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \dfrac{x}{n} & -\sin \dfrac{x}{n} \\ \sin \dfrac{x}{n} & \cos \dfrac{x}{n} \end{pmatrix}^n \tag{19}$$

で定義するという方法がある．

(18) では定義域の継ぎ目 $n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ のところで関数がちゃんとつながっていることを確かめないといけない．(19) では n によらずに同じ関数が定義されていることを確かめる必要がある．これを確かめるには，方程式 (2) を使うか加法定理 (1) を使うのが近道ということになる．

6．加法定理　それなら，加法定理をみたす関数として三角関数を定義できないのかという気がしてくる．微分方程式のときと同じように (1) だけではたりないが，もう少し条件を加えれば三角関数の定義として十分な条件になる．定理として書くと，次のようになる．

定理 3　すべての実数に対して定義された連続関数 $f(x), g(x)$ で,

$$
\begin{aligned}
&f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \\
&g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y), \qquad (20) \\
&f(x)^2 + g(x)^2 = 1, \\
&\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 1 \qquad (21)
\end{aligned}
$$

をすべてみたすものがただ 1 組存在する.

(20) の 3 つの式は, $F(x) = \begin{pmatrix} f(x) & -g(x) \\ g(x) & f(x) \end{pmatrix}$ とおくと, $F(x)$ は

$$F(x+y) = F(x)F(y) \tag{22}$$

をみたす回転行列であるということを表している. (22) で $x = y = 0$ とおけば $F(0) = F(0)^2$ となるので, 両辺に回転行列 $F(0)$ の逆行列をかけると, $F(0)$ が単位行列であることがわかる. したがって

$$f(0) = 1,\ g(0) = 0 \tag{23}$$

である.

(20) と (21) から微分の公式 (4) が導けることは, 高校の教科書に書いてあるので省略する. たとえば $f'(0) = 0$ であることは, (20) の 3 つめの式を移項して両辺を $(f(x)+1)x$ でわれば $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{-g(x)}{f(x)+1}\dfrac{g(x)}{x}$ となるので, $x \to 0$ の極限をとれば $f(x), g(x)$ の連続性と (21), (23) からしたがう.

式 (21) は極限で定式化され, ほかの条件と異質である. これが必要なわけを考えてみる. 回転群

$$SO(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

は, 行列の積により群になる. 式 (22) は, 実数 $x \in \mathbf{R}$ を回転行列 $F(x) \in SO(2, \mathbf{R})$ に写す写像 $F\colon \mathbf{R} \to SO(2, \mathbf{R})$ が準同形であることを表わしている.

写像 $F\colon \mathbf{R} \to SO(2, \mathbf{R})$ が連続な準同形なら, 実数 a に対して a 倍写像 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ との合成写像 $F_a\colon \mathbf{R} \to SO(2, \mathbf{R})$ も連続な準同形である. 連続な準同形というだけでは微分や長さといった概念がとらえられないので, 連

続な準同形の中で $F(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ を特定するために式 (21) が必要になっている．

このように加法定理をもとにしても三角関数の定義ができるが，困ったことに定理 3 の証明もそれほど簡単ではない．

7. どれがいい？ 三角関数の定義を 4 通り紹介してきたが，どれも一長一短で決定版とよべるものはないのではという気がしてくる．どれかを選ばないと本を書けないので，[1] では高校数学とのつながりを重視して，逆三角関数の逆関数として定義した．といっても，連続関数の不定積分の存在や広義積分の収束条件を証明するまで三角関数を使えないようでは困るので，積分を使わずに弧の長さを定義しておいた．

みなさんのお好みの定義はどれでしょう？

参考書

[1] 斎藤毅「微積分」東京大学出版会 (2013)

[2] 高木貞治「解析概論」岩波書店 (1938)

[3] 高木貞治「近世数学史談」岩波文庫 (1933)