Serre

「Grothendieck-Serre 交信録（原題 Correspondance Grothendieck-Serre)」という本を，ご存知でしょうか？数論幾何の黎明期の主役 2 人が，1955 年から 1987 年までに交わした，80 通以上もの手紙を収めた本です．そこには，数論幾何についての問題や展望，自分たちや他の研究者の最新の結果など，幅広い話題についての彼らの議論が，生き生きと描き出されています．

筆者にとって特に興味深いのは，スキーム，エタール・コホモロジーといった，数論幾何の基本的な道具を手にした 2 人が，それぞれのやり方でその後の進むべき方向を模索しているところです．ここでは，この「交信録」，特に 1964 年 8 月 2-3 日付けの Serre の手紙をてがかりに，数論幾何についての当時の Serre の考えを，探ってみたいと思います．

1 Weil 予想をめぐって

当時の数論幾何の大問題といえば，Weil 予想でした．Weil 予想については，本連載第 1 回の小野孝「ヴェイユ」に詳しく紹介されていますので，ここでは簡単に復習するだけにします．有限体 $\mathbb{F}_p$ 上定義された代数多様体 X の合同ゼータ関数は，

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{p^n})}{n} t^n\right)$$

により，有限集合 $X(\mathbb{F}_{p^n})$ の元の個数の母関数として定義されます．

Weil 予想（「Weil 全集」論文 [1949b]）X を有限体上定義された N 次元射影非特異代数多様体とすると，合同ゼータ関数 $Z(X,t)$ は次の性質 1.-3. をもつ．

1. $Z(X,t)$ は t の有理式である．より詳しく，

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)\cdots P_{2N-1}(t)}{P_0(t)\cdot P_2(t)\cdots P_{2N}(t)} \tag{1}$$

という型の分解をもつ．ただし，$P_q(t)$ は最高次係数が 1 の整数係数多項式であり，$P_q(t) = (1-\alpha_{q,1}t)\cdots(1-\alpha_{q,b_q}t)$ と分解すると，$\alpha_{q,1},\ldots,\alpha_{q,b_q}$ の複素数としての絶対値は $p^{\frac{q}{2}}$ である．

2. 多項式 $P_q(t)$ の次数を b_q とおき，X の Euler 数を $\chi_X = \sum_{q=0}^{2N}(-1)^q b_q$ と定める．$Z(X,t)$ は，次の形の関数等式をみたす．

$$Z(X,(p^N t)^{-1}) = \pm q^{N\chi_X/2} t^{\chi_X} Z(X,t). \tag{2}$$

3. X が有理数体上の射影非特異代数多様体 V の p を法とする還元ならば，$b_q = \deg P_q(t)$ は，V が定める複素多様体の特異コホモロジーの Betti 数 $\dim H^q(V(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ と等しい．

$\zeta(X,s)=Z(X,p^{-s})$ とおくと，Weil 予想のうち，1. の絶対値に関する部分は，$\zeta(X,s)$ の極の実部が $\frac{q}{2}$ ($0\leq q\leq 2N$ は偶数)，零点の実部が $\frac{q}{2}$ ($0<q<2N$ は奇数) ということになります．したがってこれは，連載第 2 回の黒川信重「セルバーグ」で紹介された Riemann 予想の類似となっています．Weil は，論文 [1949b] に全集でつけた自注で，特異コホモロジーに対する Lefschetz 跡公式によって Weil 予想に導かれた，と振り返っています．しかし，Weil が主に考えていたのは，予想の 3. の状況だったようで，標数 p の代数多様体に対するコホモロジー理論の構築に，真剣に取り組んだわけではないようです．

Serre は，Weil が立ち止まったところから，出発しました．まず，彼は，代数幾何の基礎付けの現代化にとり組みました．当時，数学は，層の理論，コホモロジーといった，20 世紀数学を特徴付ける抽象的な方向へ，大きく進みはじめていました．Cartan は複素多様体に関する岡の理論を整理するなど，層の理論を複素多様体に対して適用し，大きな成果を収めていました．Serre は，1955 年の論文「代数的連接層」(「Serre 全集」論文 29) で層の理論を導入し，代数幾何の基礎を一新しました．この理論は，Grothendieck のスキームの理論にも直接つながるものですが，Serre の視線の先には，Weil 予想がありました．

有限体上定義された射影非特異多様体に対して，Poincaré 双対性，Lefschetz 跡公式などの基本的な性質をみたすコホモロジー理論を定義できれば，Weil 予想のうち Riemann 予想の類似以外の部分をすべて，証明することができます．このようなよい性質をもつコホモロジー理論を，Weil コホモロジーと呼びます．Serre は，このことを踏まえ，Weil コホモロジーの構成を目標にすえて研究を進めています．1950 年代後半から 60 年代初めにかけての Serre の論文を見ると，彼の Weil 予想をめぐる試みの跡を読み取ることができます．

Weil コホモロジーの構成は，60 年代前半に，Grothendieck が定義した ℓ 進エタール・コホモロジーによって与えられました．Serre の試みの中には，Grothendieck の結果や 1973 年の Deligne による Weil 予想の最終的な証明には，直接結びつかなかったものもあります．しかし，Serre のこの一連の研究が，Weil 予想の解決に向けて果たした役割は，極めて重要なものといえます．

2　数論幾何へ

「交信録」に収められた手紙のやりとりがはじまった頃，彼らはまだ，Weil 予想の証明についてはっきりした見通しをもっていたわけではありませんでした．しかし，この時期に，スキーム，エタール・コホモロジーなど数論幾何の基礎が，彼らの手で形づくられていきました．彼らは，「交信録」の中で，驚くほど多くの事柄について論じあっています．その前半では，スキーム論や，連載第 3 回の上野健爾「小平邦彦」でも紹介された Riemann-Roch 型定理など，どちらかといえば代数幾何的な内容に多くの

紙数が割かれています．しかし，時が進むにつれ，より数論的な話題に興味が移って行きます．

当時の数論幾何の状況は，代数的整数論でいえば，整数環やイデアルといった基本的対象が定義された段階に比べることができるでしょう．図式化していえば，

$$\begin{array}{rccc} & \text{代数体} & : & \text{整数環}, \quad \text{イデアル} \\ = & \text{代数多様体} & : & \text{スキーム}, \quad \text{連接層} \end{array}$$

という比例式がなりたちます．整数環やイデアルの導入により，素イデアル分解や，単数群，イデアル類群の研究など，代数的整数論が花開いたように，スキームの導入により，代数多様体の整数論的研究の可能性が大きく開けたのです．そのときに彼らが目指したものは何だったのでしょうか．

有限体上の多様体についての Weil 予想は，確かに 20 世紀における数論幾何の爆発的な発展の契機になりました．しかし，数論幾何の研究対象としては，代数体上の代数多様体が本来の目標であり，有限体上の代数多様体は，それに比べれば小手調べでしかありません．Weil 予想の証明に力を発揮したエタール・コホモロジーは，実はそれだけではなく，代数体上の代数多様体の研究の強力な道具であることが，その後の彼らの研究で明らかにされていったのです．

Grothendieck は，エタール・コホモロジーのコホモロジー理論としての側面に着目し，モチーフの理論へと向かいました．モチーフの理論は，Weil 予想をもその 1 つの帰結として含むほどの，壮大なものです．しかし，その基礎となる標準予想とよばれる予想は，今も未解決として残されています．

一方，Serre が重視したのは，ℓ 進表現とその L 関数でした．有理数体上定義された多様体 X のエタール・コホモロジー $H^q(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は，線型空間としては，単に複素多様体としての特異コホモロジー $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ の係数拡大でしかありません．しかし，エタール・コホモロジーのもつ著しい性質は，それが，絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の表現を与えるということです．こうして得られる Galois 表現が数論的に豊かな内容をもち，さらに整数論の古典的な対象とも深く関係することが，その後の Serre の研究で明らかにされていきました．ワイルズの証明の中心にあるのが保型形式にともなう ℓ 進表現だったという事実は，ℓ 進表現を重視したセールの視点の正当性を裏書きするものといえます。

その 1 つのきっかけとなったのが，1964 年にアメリカ Woods Hole で行われたサマースクールでした．これに参加した Serre は，その直後の 8 月 2-3 日に 18 枚にわたる長い手紙を書き，サマースクールで見聞きしたこと，自分で考えたことを，Grothendieck に書き送っています．中でも，とりわけ詳しく書いているのが，局所体上の楕円曲線が定める Galois 表現についての Ogg の研究と，それに刺激されて考えたことについての報告です．その内容にたちいる前に，ℓ 進表現とは何か，簡単に見ておくことにしましょう．

3　ℓ 進表現とは

ここでいう ℓ 進表現とは，体の絶対 Galois 群の ℓ 進表現のことです．ℓ は素数を表します．素数は普通 p で表しますが，ℓ のこの用法は Kummer に遡るものだそうです．数論幾何では，2 つ以上の素数を扱うことが多く，p とは異なる素数を表すために，ℓ という文字を使います．多様体が定義される基礎体の素数には p，多様体が定める表現の係数体の素数には ℓ，といった使い分けをするのが普通です．ℓ 進体 $\mathbb{Q}_\ell$ といえば，有理数体 $\mathbb{Q}$ の ℓ 進位相に関する完備化のことです．

体 K に対し，その絶対 Galois 群 G_K とは，体 K の分離閉包 $\bar{K}$ の，K 上の自己同型群 $\mathrm{Aut}_K(\bar{K}) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ のことです．絶対 Galois 群 G_K は，$\bar{K}$ に含まれる K の有限次 Galois 拡大 L の Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ の射影極限となります．このことから，連続準同型 $G_K \to GL_n(\mathbb{C})$ は，有限次 Galois 拡大 L/K の Galois 群への標準全射との合成 $G_K \to \mathrm{Gal}(L/K) \to GL_n(\mathbb{C})$ に分解するようなものしかないことが従います．したがって，係数体を複素数体としている限りは，連続準同型 $G_K \to GL_n(\mathbb{C})$ を考えても，無限次 Galois 拡大を考えるありがたみは特にないのですが，係数体として ℓ 進体をとると話はかわってきます．これは $GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$ の開部分群 $GL_n(\mathbb{Z}_\ell)$ が，有限群 $GL_n(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ の射影極限であり，その意味で絶対 Galois 群 G_K と似たような構造をもっていることに因ります．

1955 年，東京・日光で，整数論の国際研究集会が開かれました．これには，Weil や Serre らも招かれています．この研究集会については，連載第 1 回「ヴェイユ」にも書かれています．このころ，谷山は，代数体 K 上の Abel 多様体が定める ℓ 進表現を，研究していました．これが，ℓ 進表現の組織的な研究としては初めてのものです。Abel 多様体 A は，複素多様体としてはコンパクトなトーラスですから，$H^1(A_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は，A の等分点 $A[\ell^n] = \mathrm{Ker}(\ell^n : A(\bar{K}) \to A(\bar{K}))$ を用いて，逆極限 $T_\ell A = \varprojlim_n A[\ell^n]$ の双対 $Hom_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell A, \mathbb{Q}_\ell)$ として表されます．ℓ 進表現 $T_\ell A$ は，エタール・コホモロジーが定義される以前から，研究が進められていたのです．

谷山の結果は,「虚数乗法をもつ Abel 多様体の ℓ 進表現の L 関数は，量指標の L 関数で表される」という形にまとめることができます．谷山はさらに，漠然とした形ではありましたが,「代数体上の一般の楕円曲線の L 関数は，ある種の保型形式の L 関数か」という問題を，東京・日光の研究集会で今後研究すべき課題として提出しました（「谷山豊全集」Problems）.

類体論によれば，代数体 K の絶対 Galois 群の 1 次指標は，K の類指標と対応します．代数体の類指標とは，有限個をのぞく素イデアルに対して定義された関数で，相互法則とよばれる条件をみたすものです．例えば，K が有理数体 $\mathbb{Q}$ のときには，導手 $N \geq 1$ の類指標とは，N と素な素数 p に対して定義された関数 χ で，N と素な自然数 $n = \prod_i p_i^{e_i}$ に対し $\chi(n) = \prod_i \chi(p_i)^{e_i}$ とおくと，相互法則「$n \equiv 1 \bmod N$ なら $\chi(n) = 1$」をみたすものです．導手 N の類指標は，群 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の指標と自然に対応しますが，標準同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ により，これを $G_\mathbb{Q}$ の 1 次指標と考えることができ

るのです.

もう少し弱い形の相互法則をみたす関数を，量指標とよびます．例えば，素数 p に対し p を対応させる関数は，円分指標とよばれる量指標を定めます．一般の量指標は，上のような意味では，Galois 群の指標に対応しません．しかし，ℓ 進表現を考えれば，円分指標も次のように，Galois 群の指標と考えることができます．1 の N 乗根の群を μ_N で表すと，逆極限 $\varprojlim_n \mu_{\ell^n}$ は絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の自然な作用をもちます．$p \neq \ell$ なら，p での Frobenius 置換は，$\varprojlim_n \mu_{\ell^n}$ に p 倍として作用します．これは簡単な例ですが，より一般に，代数的とよばれる，Weil の用語では A_0 型の，量指標は，絶対 Galois 群の ℓ 進指標を定めます.

谷山は，彼が研究した ℓ 進表現が，このような，代数的量指標からさだまる Galois 群の指標であることを示したのです．Weil も，別の視点から代数的量指標の幾何的な意味づけを研究していました（Weil 全集 [1952b], [1955c]）．彼が論文 [1949b] で，Weil 予想の証拠としてあげた，Fermat 超曲面と Jacobi 和の関係も，この研究につながるものでした.

4　ℓ 進表現の研究

それでは，Serre の ℓ 進表現についての研究がどのようなものだったか，そしてそれがその後の数論幾何の発展にどう影響していったのかを見ていくことにしましょう．研究の主な対象は，代数体 K 上定義された Abel 多様体 A にともなう ℓ 進表現 $T_\ell A = \varprojlim A[\ell^n]$ や，さらに一般の代数多様体 X の ℓ 進エタール・コホモロジー $H^q(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が定める ℓ 進表現です．基本的な参考文献としては，Serre の 1967 年 9 月の講義をもとにした [5] があります.

Serre と数論幾何初期年表

1926 年	9 月 15 日 南仏 Bages に生まれる
1949 年	Weil が Weil 予想を発表
1954 年	フィールズ賞受賞
1955 年	「代数的連接層」、東京・日光研究集会
1961 年	Grothendieck がエタール・コホモロジーを定義
1964 年	Woods Hole サマースクール、8 月 2-3 日の長い手紙
1965 年	楕円曲線にともなう ℓ 進表現の講義
1967 年	保型形式 Δ にともなう ℓ 進表現
1969 年	Hasse-Weil$L$ 関数の悪い因子の予想を定式化
1973 年	Deligne が Weil 予想を証明

Serre の 60 年代の ℓ 進表現についての研究は，大雑把にいって，次の 4 つにわけることができます.

1. Abel 多様体にともなう ℓ 進表現の性質から，もとの多様体の性質を知ること.

2．エタール・コホモロジーから得られる ℓ 進表現の L 関数.

3．保型形式にともなう ℓ 進表現.

4．Abel 多様体にともなう ℓ 進表現の像.

それぞれについて順にみていきましょう.

1．Woods Hole でのサマースクールの直後の 1964 年 8 月 8 日に Ogg あてに書かれ,「交信録」に収録された手紙で，Serre は後に Néron-Ogg-Shafarevich 判定法の名前で知られることになる定理を述べています．これは,「局所体上の Abel 多様体がよい還元をもつという条件は，それが定める ℓ 進表現が不分岐であるという条件と同値である」という定理です（「Serre 全集」論文 79）．この定理は，ℓ 進表現が，幾何的な性質を統制する強力なものであることを主張しています.

同じ Ogg あての手紙の中で，Abel 多様体に対する準安定還元定理を「素朴な疑問」として述べています．これは，その後まもなく，Mumford と Grothendieck により証明されました．さらにそれを使って，代数曲線に対する準安定還元定理も，Deligne と Mumford により証明されました．これらの準安定還元定理は，それぞれのモジュライのコンパクト化とも関係する，応用の広い重要な定理です．準安定還元定理の，一般の多様体への拡張は未解決の問題ですが，最近 de Jong により，それより少し弱い主張が証明され，局所体上の多様体の研究の，有効な手段として用いられています.

Néron-Ogg-Shafarevich 判定法や，準安定還元定理は，局所体上の多様体に対するものですが，同じく「ℓ 進表現による多様体の統制」という考えに基づくものとして，大域体上の Abel 多様体に対する Tate 予想があります．これは,「代数体上の Abel 多様体の同種類 (同種に関する同値類）は，ℓ 進表現の同型類で定まる」というものです．Serre は，これを楕円曲線の場合に，ある条件のもとで証明しています ([5])．一般の Abel 多様体については，Faltings が 1983 年に証明しました．これの帰結として,「代数体上定義された種数が 2 以上の代数曲線は，有理点を有限個しかもたない」という Mordell 予想も，同時に証明されました.

2．これについては，まず問題になったのが，Hasse-Weil L 関数の定義そのものでした．X を有理数体上の射影非特異代数多様体としたとき，ℓ 進表現 $H^q(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の L 関数

$$L(H^q(X), s) = \prod_{p:\text{素数}} P_p(H^q(X), p^{-s})^{-1}$$

の，素数 p での Euler 因子 $P_p(H^q(X), t) \in \mathbb{Z}[t]$ の定義をどうすればよいかということです．X がよい還元をもつ素数 $p \neq \ell$ では，Weil 予想を仮定すれば,

$$P_p(H^q(X), t) = \det(1 - Fr_p t : H^q(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

とおくことに，疑問の余地はありませんでした．Weil 予想によれば，これは X の p を法とした還元として得られる多様体に対し，Weil 予想の 1. の式 (1) の右辺の多項式 $P_q(t)$ を与えるのです．ここで，Fr_p は幾何的 Frobenius と呼ばれる作用素です．例えば，$\mathbb{Q}$

上の楕円曲線 E が，素数 p でよい還元をもつとすると，$P_p(H^1(E),t)=1-a_p(E)t+pt^2$ となります．ここで，$a_p(E)$ は $\sharp E(\mathbb{F}_p)=1-a_p(E)+p$ で定まる整数です．

悪い還元をもつ素数 p では，Galois 群の作用が不分岐とは限らないため，Fr_p の作用が定義されないのです．悪い還元をもつ素数は多様体ごとに有限個しかありませんが，Serre は，これらの素数での Euler 因子の正しい定義を与えることを重視しています．1964 年 8 月 2-3 日付けの手紙で，その理由として，悪い素数での Euler 因子の正しい定義を与えることにより，L 関数の関数等式が，Weil 予想の 2. の式 (2) のように，きれいな形をもつようにできることをあげています．またこの問題が，上の 1. で述べたような，局所体上の ℓ 進表現の研究の動機ともなっていたようです．

古典的な Artin L 関数の定義では，Galois 表現 V の惰性群不変部分をとり，そこへの Frobenius の作用の固有多項式 $\det(1-Fr_pt:V^{I_p})$ をとります．これがヒントにはなるのですが，惰性群不変部分をとるべきか，それとも余不変商をとるべきかを決定するのに何年もかかったと，上記の手紙につけた自注 (155.8, 164.23) で，Serre は振り返っています．

彼は 1969 年に，この問題に正しい答を予想として与えるのですが (「全集」論文 87)，その答えを見つける際に重要だったのが，モジュラー曲線 $X_0(11)$ 等に関する志村の結果についての考察だった，と書いています (「交信録」注 164.22)．志村は，モジュラー曲線の L 関数を，Hecke 作用素の合同関係式を使って計算し，それが楕円保型形式の L 関数で記述できることを示していました．この志村の結果から，悪い素数での Euler 因子をどう定義するべきかについての指針が得られるのです．

一方，志村は，こうした研究から，楕円曲線の L 関数についての上記の谷山の問題について,「有理数体上定義された楕円曲線の L 関数は，楕円保型形式の L 関数で与えられる」という予想に到達していました．これが志村・谷山予想とよばれるものです．志村は 1964 年秋に，Serre にこの予想を直接伝えています (「志村全集」論文 64e の自注)．志村・谷山予想は，保型形式を L 関数の関数等式で特徴付ける Weil の逆定理についての論文（「Weil 全集」論文 [1967a]）により，広く知られるようになりました．

時代はずっと下がりますが，Serre は，この志村・谷山予想の解決でも大きな役割を果たしています．Frey による，志村・谷山予想と Fermat の最終定理との密接な関連についての観察をうけて，Serre は，1985 年に Mestre にあてた手紙で，志村・谷山予想から Fermat の最終定理を導くために示すべき命題を，定式化しました（「全集」論文 142, 143）．Mazur の部分的な結果の後，Ribet がこの Serre の予想の一部を 1987 年に証明したことにより，Fermat の最終定理が志村・谷山予想に帰着されました．そして，1994 年 Wiles が，志村・谷山予想のかなりの部分を証明したことにより，Fermat の最終定理が証明されたのでした．志村・谷山予想自体も，Wiles の方法を改良することにより，1999 年完全に解決されました．

3．L 関数を通しての保型形式と ℓ 進表現との関係は，その後の Serre の研究の大きなテーマになっていきます．志村・谷山予想では，ℓ 進表現に対し，対応する保型形式の存在が問題でしたが，ここでは，逆に，保型形式に対し ℓ 進表現を構成すること，さ

らにその ℓ 進表現によって保型形式を調べることが問題となります．これらは，保型形式と ℓ 進表現の関係についての「Langlands プログラム」の一部をなすものとみることもできます.

1967 年に，Serre は，保型形式 $\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$ の L 関数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s} = \prod_p(1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s})^{-1}$ と同じ L 関数をもつ ℓ 進表現 V_τ の存在を予想し，それを用いて $\tau(p)$ の間の合同式の解釈を与えました（「全集」論文 80）．その後まもなく Deligne は，久賀・佐藤多様体のコンパクト化のエタール・コホモロジーを用いて，表現 V_τ の幾何的な構成に成功しました．さらに Deligne は，この構成を使って，Ramanujan 予想 $|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$ を Weil 予想に帰着させ，証明しました．Serre は Deligne と共同で，この Deligne の結果を使って，重さ 1 の保型形式に対応する，$\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大 L の Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の既約 2 次元表現を構成しています（論文 101）．

一方 Serre は，保型形式の合同関係の理論を，p 進保型形式の理論へ発展させ，Eisenstein 級数の p 進補間を用いた久保田-Leopoldt p 進 L 関数の構成も与えました（論文 97）．この研究は，その後さまざまな方向へ拡げられ，Deligne-Ribet による総実代数体の p 進 L 関数の構成や，さらには Mazur-Wiles による岩澤主予想の証明なども，この研究を発展させたものと考えることができます．p 進 L 関数や岩澤主予想については，連載第 4 回の市村文男「岩澤健吉」に詳しく紹介されています.

4．Serre は，ℓ 進表現 $G_K \to GL(T_\ell A)$ の像についても研究しています．これは，ある意味で 1. の逆にあたるものです．1. では，Tate 予想を「Galois 表現による多様体の統制」と解釈しましたが，同じ Tate 予想を「多様体の代数的サイクルによる Galois 群の像の統制」とも解釈することができます．この視点からは，谷山による虚数乗法をもつ Abel 多様体が定める ℓ 進表現の研究は，Abel 多様体が自己準同型をたくさんもつために Galois 群の像が小さくなっていて類体論で扱えるようになっている場合の研究，と理解することができます.

Serre は，Grothendieck のモチーフについての研究の影響もうけて，この谷山の研究を定式化しなおし，後に Serre 群と呼ばれることになる，代数的量指標を統制する射影代数群を導入しました（[5]）．Deligne により，Serre 群は，潜在的 CM モチーフのなす淡中圏のモチヴィック Galois 群の連結成分であることが示されました．これは，Weil の発した代数的量指標の幾何的意味という問への満足すべき答であり、その意味で類体論の完成ともいえるものでした.

Serre は，Galois 群の像が，類体論で扱えない最初の場合も調べました．E を代数体 K 上定義された楕円曲線とし，ℓ を素数とします．このとき，Galois 群の $T_\ell E = \varprojlim_n E[\ell^n]$ への作用は，ℓ 進表現 $G_K \to GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$ を定めます．Serre は，E が虚数乗法をもたなければ，この ℓ 進表現の積 $G_K \to \prod_\ell GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$ の像は $\prod_\ell GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$ の開部分群であることを示しました（[5], 論文 70, 94）．この結果は，Mazur によって，有理数体上の楕円曲線の有理等分点の構造の決定へと精密化されました．さらに Mazur の結果は，Merel により，一般の代数体上の楕円曲線へ拡張されています．また，この Serre の結果は，

Mumford-Tate 群と Galois 群の像の関係というモチーフ論的な意味ももつものです（論文 161）.

5　Serre と Grothendieck

「交信録」には，Serre と Grothendieck が，どのように数論幾何という新しい分野を切り開いていったのかが，ありありと描かれています．その中で印象的なことの 1 つは，彼ら 2 人の数学の方法の違いです．Grothendieck は発見的な考察に基づき，大きな抽象理論を次々と提示していきます．それに対し，Serre は豊富な知識に裏づけられた洞察により，着実に定理を証明し，あるいは予想を定式化していくという行き方で，好対照を見せています．Grothendieck がモチーフという数論幾何の一般的な枠組みの建設を目指したのに対し，Serre は Abel 多様体や保型形式にともなう ℓ 進表現を詳しく研究したという違いも，彼らの気質の差によるものでしょう．

彼らの方法の違いは，例えばモチーフをめぐるやりとりに現れています．1964 年 8 月 16 日付けの手紙で，Grothendieck は彼が発見したばかりのモチーフの着想を Serre に伝え,「この種の発見的な考察に基づくモチーフの圏の構成が，今後の研究の本質的な部分となるだろう」と書いています．これに対し，Serre は，同月 x 日（金）の手紙の中で,「残念ながら，モチーフの概念やその形而上学について，ほとんど（あるいは全く）言うべきことはない。大雑把にいえば，私もあなたのようにゼータ関数（あるいは Galois 作用をもったコホモロジー）がスキームを非常に忠実に反映するとは思う．そこから正確な予想を...」と，現実主義者らしい対応をみせています．そこには，自分の方法への確信もうかがえます．

一方，2 人の協力が絶妙の連係を見せているのが，Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の証明です．この公式は，正標数の代数閉体上のアファイン代数曲線 U 上のスムーズ ℓ 進層 $\mathcal{F}$ の Euler 数 $\chi_c(U,\mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2}(-1)^q \dim H_c^q(U,\mathcal{F})$ を与えるものです．1963 年 4 月 10 日付けの手紙で Grothendieck は，$\chi_c(U,\mathcal{F}) - \mathrm{rank}\mathcal{F}\cdot\chi_c(U,\mathbb{Q}_\ell)$ は U の境界の点の寄与の和として表せるべきであり，それは各点での惰性群のある特殊な表現を用いて表せるはずであると述べています．そして，Serre に対し，そのような表現が存在するか尋ねています．これに対し，Serre は直ちに，後に Swan 表現とよばれることになるその表現は，分岐群と Brauer の理論を用いて定義できると答えています．Grothendieck は，これを使って問題の公式の証明を完成することができました．

彼らは，それぞれの方法で，数論幾何という未知の広大な世界への道を切り開きました．そして，この新世界の探索は，彼らの業績を受け継いだ私たちの手に，今，委ねられているのです．

補記

この記事では、連載「現代代数学の歩み」の趣旨に沿って，セールの数論幾何に関連する 1960 年代の研究に焦点をあてて紹介しました。セールは，この記事でも簡単に

ふれた代数幾何や，それ以前の位相幾何に関する研究でも目覚ましい業績を挙げ，それに対し，1954 年に 27 歳の若さでフィールズ賞を受けています．また，数論に関する業績も，数論幾何に関係したものばかりではありません．セールは，自分としては専門分野を変えたつもりはなく，研究を進めていたら自然にそうなっていた，とインタビュー（『セール全集』141 と [6]）で語っています。この 2 つのインタビューは，こうした彼の数学観から余暇の過ごし方までが窺える大変興味深いものですので、ぜひ一読をおすすめしたいと思います.

参考文献

[1] A. Grothendieck, J.-P. Serre, Grothendieck-Serre Correspondence, SMF, 2001. (bilingual edition, AMS, 2003.)

[2] 斎藤 毅、Fermat 予想 1，岩波書店, 2000.

[3] J.-P. Serre, 全集 I-III, IV, Springer, 1986, 2000.

[4] J.-P. Serre, Cours d'Arithmétique, PUF, 1977.（和訳　数論講義、岩波書店, 1979.）

[5] J.-P. Serre, Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Benjamin Publ., 1968. (和訳 楕円曲線と ℓ 進アーベル表現, ピアソンエデュケーション, 1992.)

[6] M. Raussen, C. Skau, Interview with Jean-Pierre Serre, アメリカ数学会会報 51-2, p.210-214, 2004. http://www.ams.org/notices/200402/comm-serre.pdf

[7] G. Shimura, 全集 I-IV, Springer, 2002.

[8] [増補版] 谷山豊全集, 日本評論社, 1994.

[9] A. Weil, 全集 I-III, Springer, 1978.

[10] A. ヴェイユ, 数学の創造 著作集自註, 日本評論社, 1983.