

エタール・コホモロジーをめぐって

齋藤 毅 (東京大学)*

エタール・コホモロジーの理論が Séminaire Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA4) [1] で 1963-64 年に体系的に展開されてから 60 年以上がたちました。それ以来、エタール・コホモロジーは数論幾何の基本的な対象として研究されてきました。ここでは Correspondance Grothendieck-Serre [9] (英仏 2 言語版もあり) などからその歴史を振り返り、最近の発展まで紹介します。

1 Weil 予想からエタール・コホモロジーへ

1.1 Weil 予想

エタール・コホモロジー導入の契機となったのは Weil 予想でした。Weil は Riemann 予想の関数体類似を証明したのち、その高次元化を予想として提出しました [20]。

Riemann のゼータ関数は Dirichlet 級数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ として定義されますが、Euler 積 $\zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ として表すこともできます。どちらも $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束し、

$\zeta(s)$ は有理型関数として複素平面全体に解析接続されます。 $s = 1$ での 1 位の極以外は正則で、負の偶数 $s = -2, -4, \dots$ で 1 位の零点をもつことが関数等式からわかります。Riemann 予想は、これ以外の零点はすべて $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ をみたすという未解決問題です。

位数が q の有限体 \mathbf{F}_q 上の有限型で分離なスキーム X のゼータ関数も Euler 積で定義できます： $\zeta_X(s) = \prod_{x: X \text{ の閉点}} \frac{1}{1 - \frac{1}{(Nx)^s}}$ 。ここで、 Nx は x の剰余体の元の個数です。

Nx は q の中なので、Riemann のゼータ関数とは異なり、 $\zeta_X(s)$ は $t = q^{-s}$ の巾級数として表されます。 X の次元を d とすると、Riemann のゼータ関数と同様に、 $\zeta_X(s)$ は $\operatorname{Re} s > d$ で絶対収束します。

X が完備非特異とすると、Weil はこの $\zeta_X(s)$ が関数等式をみたし、 $t = q^{-s}$ の有理関数であって Riemann 予想の類似をみたすことを予想しました。さらに X が標数 0 の代数多様体 Y を標数 p に還元したものである場合には、 $\zeta_X(s)$ の $t = q^{-s}$ の有理関数としての分解から定まる Betti 数が、複素多様体としての Y の特異コホモロジーとしての Betti 数と一致することも予想しました。Weil は代数曲線の場合にこの予想を証明していまし

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: t-saito@ms.u-tokyo.ac.jp

web: <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/j-index.html>

本研究は科研費 (課題番号:24K06683) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 14F20

キーワード: エタール・コホモロジー, Grothendieck-Serre correspondence

た。この予想がエタール・コホモロジーの構成を導くことになりました。

1.2 層のコホモロジー

Grothendieck はエタール・コホモロジーの導入以前に [7] で層のコホモロジーの理論を構築していました。Cartan と Eilenberg は [5] で環上の加群のホモロジー代数の理論を導来関手のことばで整備していました。Grothendieck は [7] でアーベル圏を導入し、導来関手のことばをこの抽象的な枠組みへ拡張することで、層のコホモロジーを [5] の理論と統一しました。

[7] は Grothendieck がカンサスに滞在している間に書かれたのですが、Lawrence 26.2.1955 付の Grothendieck の手紙には

Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais en même temps la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau :...

(導来関手の理論を加群の圏より一般的な圏に対して定式化すれば、層係数の空間のコホモロジーを手軽にいっぺんに得られることに気がついた。)

とあります。Lawrence 28.1.1955 付の Grothendieck の手紙は、

comme je ne pouvais emporter tous mes papiers par avion, j'ai envoyé une partie dans deux colis, expédiés ensemble le jour de mon départ. Mais un seul est arrivé, il y a une semaine, et il est improbable maintenant que le deuxième arrive aussi.

(飛行機で書類を全部運ぶことができなかつたので、一部を2つの小包で出発当日に発送しました。1つだけが先週届いて、もう1つは届かなさそうです。)

とはじまり、上の Lawrence 26.2.1955 付の手紙の続きでは

D'ailleurs, probablement tous ça se trouve plus ou moins explicitement dans le bouquin Cartan–Eilenberg, que je n'ai pas encore eu l'heur de voir encore.

(それに、おそらく Cartan–Eilenberg の本にこれらのことは多かれ少なかれ明示的に書いてあるのかもしれませんが、まだ確かめることができません。)

とあるので、Grothendieck は [5] が手元にないまま [7] の内容を考えていたようです。

一年後、Grothendieck は書き上げた [7] の原稿を出版してくれる雑誌を見つけるのに困っていました。

Paris le 19.9.1956

L'American Journal ne marche pas pour mon article, puisque j'y publie déjà les fibrés sur la sphère de Riemann ; et les Transactions non plus, car ne m'étant pas conformé aux tabous de rédaction très sévères de Sammy, il voudra me faire retaper le manuscrit, et je n'en ai pas l'intentions.

(American Journal は私の論文にはだめでしょう。リーマン球面上のバンドルに関する論文をそこで既に発表しているからです。Transactions もです。Sammy(=Eilenberg) の非常に厳格な執筆上のタブーに従っていないので、原稿を書き直すように言われるで

しょうがそんなことはしたくないからです。)

結局

13.11.1956

je l'ai proposée à Tannaka pour le Tôhoku, il paraît que les articles-fleuves ne les rebutent pas.

(Tohoku の淡中に提案してみたところ、長い論文でも構わないようでした。)

ということになり、論文 [7] が現在の通称 Tohoku とよばれるようになることが確定しました。

1.3 代数的なファイバー束から

エタール・コホモロジーは層のコホモロジーの一種ですが、位相空間の層との大きな違いは、開被覆によるはりあわせの条件を考えるのではないところにあります。位相空間の開集合の包含写像の代わりとして、スキームのエタール射を考えます。層を定義するためには、集合に位相を入れたものではなく、圏に Grothendieck 位相を入れたものを考えます。圏の Grothendieck 位相が定義されると、[7] の枠組みを適用することでエタール・コホモロジーも同様に構成されます。

[10] によると、エタール・コホモロジーの着想のものは 1958 年 4 月 21 日の Chevalley セミナーでの Serre の講演 [18] にあったようです。そこで Serre は代数多様体上の代数的なファイバー束について、Zariski 位相で局所的に自明という条件よりも広い定義を与えました。厳密にいうとそこでの定義は最終的なものとは違うのですが、[10] には

Grothendieck, enthousiaste, confia à Serre qu'il voyait déjà comment la "localization étale", en un sens qui devait être précisé plus tard, donnerait non seulement "le bon H^1 ", mais aussi "les bons H^i supérieurs" d'une "cohomologie de Weil".

(「エタール局所化」が、その意味はのちに正確にされることになるが、「正しい H^1 」を与えるだけでなく「Weil のコホモロジーの高次の正しい H^i 」をどのように与えるかまでもうわかったと、Grothendieck は熱く Serre に語った。)

と書かれています。これとほとんど同じ内容が SGA 4 [1, Exposé VII, Remarques 2.1 (ii)] にもあります：

On peut dire qu'en passant de la cohomologie de Zariski à la topologie étale, "on a fait ce qu'il fallait" pour obtenir "le bon" H^1 (qui figure au 2ème membre de $H^1(X, G) \simeq \text{Hom}(\pi_1(X, a), G)$) pour un groupe de coefficients constant fini G . C'est un fait remarquable, qui sera démontré par la suite de ce séminaire, que cela suffit également pour trouver les "bons" $H^i(X, G)$ pour tout groupe de coefficients de torsion (du moins si G est premier aux caractéristiques résiduelles de X).

(Zariski コホモロジーからエタール位相に移行することで、有限定数群 G 係数の $(H^1(X, G) \simeq \text{Hom}(\pi_1(X, a), G))$ の右辺に現れる)「正しい」 H^1 を得るためにすべきことはやったと言えます。注目すべきことは、このセミナーでこれから示されるように、これが

任意のねじれ係数群 (少なくとも G が X の剰余標数と素である場合には) に対して「正しい」 $H^i(X, G)$ をみつけるのにも十分であることです.)

2 SGA5

エタール・コホモロジーの Weil 予想への応用のうち, L 関数の有理性は Grothendieck–Lefschetz 跡公式の帰結として 1965/66 年に行われたセミナーで扱われました. しかし, その報告集 SGA5[2] は Grothendieck が 1970 年 9 月 30 日に IHES から去るなどの紆余曲折を経て 1977 年によく出版されました. そこに至る詳細は編者を務めた Illusie による [12] にあります. この SGA5 とその双生児である SGA4 $\frac{1}{2}$ [3] はのちに Grothendieck の怒りをよび, Grothendieck はそれぞれの編者である Illusie と Deligne を激しく攻撃しました [8].

2.1 Grothendieck–Lefschetz 跡公式

X を有限体 \mathbf{F}_q 上の有限型で分離なスキームとし, \mathcal{F} を X 上の l 進層とします. $d = \dim X$ とおきます. X の座標を q 乗するという作用が定める X の自己射を X の Frobenius とよび F で表します. このときエタール・コホモロジーへの F の作用のトレースの交代和について Grothendieck–Lefschetz 跡公式

$$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \mathrm{Tr}(F^*: H^i(X_{\overline{\mathbf{F}}_q}, \mathcal{F})) = \sum_{x \in X(\mathbf{F}_q)} \mathrm{Tr}(F_x: \mathcal{F}_{\bar{x}}) \quad (1)$$

がなりたちます. 右辺は X の \mathbf{F}_q 有理点全体にわたる和で, 各項は \mathbf{F}_q 有理点 x に対し, x の上の幾何的 point \bar{x} での \mathcal{F} のストークへの Frobenius の作用のトレースです. この式から \mathcal{F} の L 関数の有理性がしがたがいます.

[10] の 183 ページの L 関数の有理性の式 (3) の後に

Sa démonstration a donné lieu à malentendus et polémiques (cf. [RS]). L’histoire est la suivante.

(その証明は誤解と論争を引き起こした ([RS] 参照). その経緯は以下の通りである.)

とあるので, 興味のある方はお読みください. 原証明の問題点として [12] には

Daniel Ferrand discovered in 1968 that, in general, an endomorphism of a distinguished triangle of perfect complexes does not imply an additivity for the traces [22]. Soon afterwards, a satisfactory formalism (filtered derived categories), where additivity was restored was constructed in ([34], V). However, this (wrong) additivity is implicitly used in Bucur’s XII, (5.3), referring to the (missing) XI, 4. This should have been fixed in the expected revision.

も指摘されています.

[22] Ferrand, Daniel. *On the non additivity of the trace in derived categories*. arXiv: math/0506589v1, 2005.

[34] Illusie, Luc. *Complexe cotangent et déformations*. I. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

2.2 L 関数の関数等式

Bures 9.30.1964 付けの Grothendieck の手紙は次のように始まります.

J'ai réfléchi à l'équation fonctionnelle des fonctions Z dans le cas géométrique (corps de base \mathbf{F}_p), et les choses me semblent plus simples que tu ne semblais croire.

((基礎体が \mathbf{F}_p の) 幾何学的な場合にゼータ関数の関数等式について考えてみたのですが, あなたが考えていたよりも簡単なようです.)

エタール・コホモロジーの大域的な双対性を, プロパー射 $g: X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{F}_p)$ に対しては

$$(1 \text{ bis}) \quad D(R_!g(E)) = R_!g(D(E))$$

として定式化して, そこから

Traduisant les formules (1 bis) et (2) en termes de polynômes caractéristiques, i.e. de fonctions Z , il vient les équations fonctionnelle

$$(A) \quad L_{D(E)}(t) = (-t)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}) \quad (g \text{ propre})$$

(式 (1 bis) と (2) を特性多項式, すなわち L 関数にいいかえると, 次の関数等式が得られます.)

と, L 関数の関数等式を導いています. さらに左辺について

Dans certains cas, $D(E)$ s'exprime simplement à l'aide de E et on obtient une équation fonctionnelle en L_E tout seul. Supposons par exemple que X soit lisse et partout de dimension n et que E soit « constant tordu », alors on aura (par définition)

$$(7) \quad D(E) = \check{E}(n)[2n],$$

où le signe (n) indique tensorisation par le faisceau de Tate $\mathbf{Q}_\ell(n)$, et le signe $[m]$ indique translation de degrés de m , enfin $\check{}$ désigne le faisceau dual au sens naïf. On aura par suite

$$(7 \text{ bis}) \quad L_{D(E)}(t) = L_{\check{E}}(p^{-n}t),$$

(ある場合には, $D(E)$ は E のみを用いて簡単に表示できて L_E のみの関数等式が得られます. 例えば, X が smooth でいたるところ n 次元であり E が「局所定数層」であると仮定すると (定義により)

$$(7) \quad D(E) = \check{E}(n)[2n],$$

が得られます. ここで記号 (n) は Tate 層 $\mathbf{Q}_\ell(n)$ とのテンソル積を表し, 記号 $[m]$ は次数 m のシフトで $\check{}$ は素朴な意味での双対層を表します. したがって

$$(7 \text{ bis}) \quad L_{D(E)}(t) = L_{\check{E}}(p^{-n}t),$$

が得られます.)

を得ています.

2.3 Euler–Poincaré 標数の公式

エタール・コホモロジーに限らず, コホモロジー理論の最も基本的な不変量は, コホモロジーの次元の交代和として定義される Euler–Poincaré 標数です. Euler–Poincaré 標数は前節の関数等式にも現れました. Euler–Poincaré 標数を表す公式は, 微分幾何学では Gauss–Bonnet の公式とよばれ, 代数幾何学や複素幾何学では接続層のコホモロジーに対する公式が Riemann–Roch の公式とよばれます. SGA 5 の序文によれば

Cet exposé, qui devait clore le séminaire, n’a malheureusement pas été rédigé, pas plus d’ailleurs que son très bel exposé introductif, qui passait en revue les formules d’Euler–Poincaré et de Lefschetz dans divers contextes (topologique, analytique complexe, algébrique).

(このセミナーの締めくくりとなるはずだった講義は, 残念ながら原稿が作成されなかった. 同様に, Euler–Poincaré の公式と Lefschetz の公式を様々な文脈 (位相的, 複素解析的, 代数的) で概説した彼の素晴らしい導入講義も原稿が作成されなかった.)

という残念なことになっています.

しかし, 代数曲線上のエタール層の Euler–Poincaré 標数については, 現在 Grothendieck–Ogg–Shafarevich 公式とよばれる公式が SGA 5 の Exposé X[2] に書かれています. この公式の発見が [9] に収録された April 10, 1963 付けの Grothendieck の手紙から読みとれます.

Soit C courbe algébrique complète connexe simple/ k , avec k algébriquement clos, F un faisceau de torsion « constructible » sur C , ...

La formule de Ogg, pour F modérément ramifié, et bien sûr premier à la caractéristique, s’écrit

$$(0) \quad E(C, F) = nE(C) - \sum_{x \in C} \varepsilon_x(F)$$

où $E(C, F)$ est la caractéristique d’Euler–Poincaré de C à coefficients dans F : ...

$$\varepsilon_x(F) = n - n_x,$$

n_x étant la longueur de F_x et n étant n_x pour x général ...

Malheureusement, d’après un contre-exemple de Tate cité par Ogg, cette formule devient fautive si on ne suppose plus F modérément ramifié. La question naturelle est de savoir si la formule (0) reste vraie à condition de définir convenablement les $\varepsilon_x(F)$, étant entendue que ceux-ci doivent être des invariants « locaux » en un sens évident.

(C を代数閉体 k 上の非特異連結完備代数曲線とし, F を C 上の「構成可能」なねじれ層とする. ...)

Ogg の公式は馴分岐の F , F はもちろん標数と素とする, に対し

$$(0) \quad E(C, F) = nE(C) - \sum_{x \in C} \varepsilon_x(F)$$

である. ここで $E(C, F)$ は F 係数の C の Euler-Poincaré 標数である. …

$$\varepsilon_x(F) = n - n_x,$$

n_x は F_x の長さであり, n は一般の x に対する n_x である. …

残念ながら, Ogg が引用した Tate の反例により, この公式は F が馴分岐と仮定しなければなりたない. 自然な疑問は $\varepsilon_x(F)$ をうまく定義して公式 (0) をなりたつようにできるかである. ここで, $\varepsilon_x(F)$ は明らかな意味で「局所的」不変量でなければならない.)

この手紙につけた注に Serre は

Je n'ai pas eu de mal à définir les invariants réclamés par Grothendieck (cf. lettre suivante d'avril 1963), et il en a aussitôt déduit la formule d'Euler-Poincaré qu'il désirait (formule dite de « Ogg-Shafarevich-Grothendieck »).

(Grothendieck が注文した不変量を定義することは朝飯前で (1963 年 4 月の次の手紙を参照), 彼はそこからただちに希望どおり Euler-Poincaré の公式 (いわゆる「Ogg-Shafarevich-Grothendieck の公式」) を導いた.)

この補正項は現在 Swan 導手とよばれています.

SGA5 の序文には L'exposé IX, par J.-P. Serre, intitulé "Introduction à la théorie de Brauer", a été publié dans [4], et n'est pas reproduit dans ce volume. L'un de ses principaux résultats (dû à Swan), concernant l'existence d'un module projectif ayant pour caractère le "caractère de Swan", est utilisé dans l'exposé X, où est démontré une formule d'Euler-Poincaré pour un faisceau sur une courbe,

[4] Serre, J.-P., REPRESENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS, Hermann, 2ème édition, refondue, 1971.

(J.-P. Serre による「Brauer 理論入門」と題された第 IX 講は [4] に出版されていて, 本書には収録されていない. その主要な結果の一つ (Swan による) である「Swan 指標」を指標とする射影加群の存在に関する結果は, 第 X 講で曲線上の層に対する Euler-Poincaré 公式の証明に用いられている.)

とあり, 「有限群の線型表現」はもとは SGA5 の一部だったことがわかります.

Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式は SGA 5 の Exposé X [2] のほか, Bourbaki セミナーでも 1965 年 2 月に Raynaud が講演しています [15]. この Bourbaki セミナーについては, 次のような逸話が [17] にあります.

Raynaud recalls a slight feeling of panic the day before the seminar, when Grothendieck lightheartedly suggested that he talk about a grand generalization of what he had already carefully prepared.

2.4 指数公式

Grothendieck–Ogg–Shafarevich 公式の高次元化はエタール・コホモロジーの基本的な問題として残されました。その試みのいくつかは [11] でたどることができます。一気に現在まで時計を進めると、Euler–Poincaré 標数は指数公式

$$\chi(X, \mathcal{F}) = (CC\mathcal{F}, T_X^*X)_{T^*X} \quad (2)$$

で与えられます [16]。ここで X は標数 $p > 0$ の代数閉体上の射影非特異代数多様体、 \mathcal{F} は X 上の構成可能層です。 $CC\mathcal{F}$ は \mathcal{F} の特性サイクルとよばれるもので、 $n = \dim X$ とすると、 X の余接束 T^*X の n 次元既約閉集合いくつかの形式的な整数係数の線形結合です。右辺はこれと T^*X の零切断 T_X^*X との交点数です。 [16] では X が射影的という仮定が必要でしたが、阿部知行は X が完備という仮定で十分であることを示しています [4]。 X が代数曲線の場合には上の指数公式は Grothendieck–Ogg–Shafarevich 公式と一致するので、指数公式は Grothendieck–Ogg–Shafarevich 公式の高次元化となっています。

指数公式 (2) はコンパクト複素多様体上のホロノミック D 加群に対する Dubson–柏原の指数公式 [6], [13] の類似です。

SGA5 の “Cet exposé, qui devait clore le séminaire, n’a malheureusement pas été rédigé ” について Grothendieck は [8] で

(⁸⁷1) (31 mai) Cet exposé de clôture, sûrement un des plus intéressants et des plus substantiels avec l’exposé d’ouverture, n’a visiblement pas été perdu pour tout le monde, comme je vois en prenant connaissance de l’article de Mac Pherson “Chern classes for singular algebraic varieties” (*Chern classes for singular algebraic varieties*, Annals of Math. (2) 100, 1974, p. 423–432) (reçu en avril 1973). J’y retrouve, sous le nom de “conjecture de Deligne–Grothendieck”, une des principales conjectures que j’avais introduites dans cet exposé dans le cadre schématique. Elle est reprise par Mac Pherson dans le cadre transcendant des variétés algébriques sur le corps des complexes, l’anneau de Chow étant remplacé par le groupe d’homologie.

(この最後の講義は、最初の講義とともに間違いなく最も興味深く内容の濃い講義の一つですが、すべての人にとって失われたものとなっていたわけではないことが Mac Pherson “Chern classes for singular algebraic varieties” (*Chern classes for singular algebraic varieties*, Annals of Math. (2) 100, 1974, p. 423–432) (1973 年 4 月に受理) をみるとわかる。そこには、「Deligne–Grothendieck 予想」という名前で、この講義でスキームの枠組みで導入した主要な予想の一つがある。Mac Pherson は、複素数体上の代数多様体の超越的な枠組みで Chow 環をホモロジー群に置き換えて、この予想を再び取り上げている。)

(6 juin) Je prends cette occasion pour expliciter ici quelle avait été la conjecture que j’avais énoncée dans le séminaire dans le cadre schématique, en y signalant sûrement la variante évidente dans le cadre analytique complexe (voire, rigide-analytique). Je

la concevais comme un théorème du type “Riemann–Roch”, mais à coefficients discrets au lieu de ce soit à coefficients cohérents.

Pour X régulier, je postulais l’existence d’un homomorphisme de groupes canonique, jouant le rôle du “caractère de Chern” dans le théorème de RR cohérent,

$$(1) \quad ch_X: K_\bullet(X, \Lambda) \rightarrow A(X) \otimes_{\mathbf{Z}} K_\bullet(\Lambda),$$

où $A(X)$ est l’anneau de Chow de X et $K_\bullet(\Lambda)$ le groupe de Grothendieck formé avec les Λ -modules de type fini. Cet homomorphisme devait être uniquement déterminé par la validité de la “formule de Riemann–Roch discrète”, pour un morphisme *propre* $f: X \rightarrow Y$ de schémas réguliers,

(この機会に、スキームの枠組みの中でセミナーで述べた予想をここで明らかにし、複素解析的（あるいはリジッド解析的）枠組みでのその明らかな変種にも言及する。私はそれを Riemann–Roch 型の定理として、ただし接続層係数でなく離散係数として構想していた。

正則な X に対して、接続層の RR 定理における「Chern 指標」の役割を果たす標準群準同型

$$(1) \quad ch_X: K_\bullet(X, \Lambda) \rightarrow A(X) \otimes_{\mathbf{Z}} K_\bullet(\Lambda),$$

の存在を仮定した。ここで、 $A(X)$ は X の Chow 環、 $K_\bullet(\Lambda)$ は有限生成 Λ 加群の Grothendieck 群である。この準同型は、正則スキームの固有射 $f: X \rightarrow Y$ に対する「離散 Riemann–Roch 型公式」の成立によって一意的に定まる。）

と書いています。特性サイクルを使うと、正標数でも MacPherson が構成したものと同様のものが Chow 群への射として構成できるのですが、この場合に固有射による順像との整合性は、次元 0 の部分以外ではなりたたないことがわかっています。指数公式 (2) は、この次元 0 の場合の整合性の特別な場合となります。

2.5 Hasse–Arf の定理

Swan 導手の整数性は Hasse–Arf の定理とよばれます [19, Chapitre VI].

Paris, le 9 novembre 1958

3. Le cas des corps locaux. La théorie du conducteur, et la ramification supérieure.

Si l’on note $\psi(x)$ la fonction réciproque de $\varphi(x)$, on peut définir une nouvelle numérotation des groupes de ramification supérieure, en posant :

$$V^x = V_{\psi(x)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(3. 局所体の場合. 導手の理論と高次分岐.

$\psi(x)$ を $\varphi(x)$ の逆関数とすると、次のように高次分岐群の新しい番号づけを定義できます.)

として上つき分岐群を定義し、($\varphi(x)$ については voir par exemple Kawada, Annals, 1953 としています.)

THÉORÈME : a) *Si L/K est une extension abélienne, les sauts de la fonction ψ sont des entiers.*

COROLLAIRE : *Le conducteur d'Artin est un entier.*

(定理 : a) L/K がアーベル拡大ならば、関数 ψ のジャンプは整数である。

系 : アルティン導手は整数である.)

を述べています。定理の証明は [19] のものと同じで

La méthode est la même que celle du papier original de Hasse (qui s'occupait du cas d'un corps des restes finis), à cela près que les isogénies remplacent les calculs d'indices des normes.

[Je me suis longtemps figuré que ce dernier résultat était nouveau, dans le cas d'un corps de restes algébriquement clos quelconque – donc, trivialement, dans le cas d'un corps de restes parfait quelconque. – En fait, C. Arf (J. Crelle, t. 181) avait démontré ça dès 1940, par une méthode calculatoire extrêmement compliquée.]

(方法は、ノルムの指数の計算を同種写像に置き換えた点を除いて、Hasse の原論文 (有限剰余体の場合を扱っていた) と同じである。

[この最後の結果は、代数閉な任意の剰余体の場合、したがって明らかに任意の完全剰余体の場合には、新しい結果であると長い間思っていた。実際は C. Arf (J. Crelle, 第 181 巻) が 1940 年に、極めて複雑な計算により既に証明していた。]

3 年表

1949.5 Weil 予想の論文 (出版)

1955.2 層のコホモロジーについての手紙

1958.4.21 Serre 代数的ファイバー束の定義 (Chevalley セミナー)

1958.11.9 Hasse–Arf の定理についての手紙

1963-64 SGA4

1963.4.10 Grothendieck–Ogg–Shafarevich 公式についての手紙

1964.9.30 関数等式についての手紙

1965-66 SGA5

1970.9.30 Grothendieck IHES を去る

1973 Deligne が Weil 予想のうち残されていた Riemann 予想の類似の部分を証明

1977 SGA5 出版

参考文献

- [1] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, THÉORIE DES TOPOS ET COHOMOLOGIE ÉTALE DES SCHÉMAS. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA4) 1963-64, Lecture Notes in Mathematics nos. 269, 270, 305 (Springer-Verlag, Berlin-New York).
- [2] A. Grothendieck, COHOMOLOGIE ℓ -ADIQUE ET FONCTIONS L . Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA5) 1965-66, Ed. L. Illusie, Lecture Notes in Mathematics no. 589 (Springer-Verlag, Berlin-New York).
- [3] P. Deligne, COHOMOLOGIE ÉTALE (SGA 4 $\frac{1}{2}$). Lecture Notes in Mathematics no. 569 (Springer-Verlag, Berlin-New York).
- [4] Tomoyuki Abe, *Ramification theory from homotopical point of view, I*. [arxiv:2206.02401](https://arxiv.org/abs/2206.02401)
- [5] Henri Cartan, Samuel Eilenberg, HOMOLOGICAL ALGEBRA, Princeton University Press, 1956.
- [6] A. Dubson, *Formules pour l'indice des complexes constructibles et D -modules holonomes*. C. R. Acad. Sci. 298, 113–116 (1984)
- [7] Alexandre Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. 9 (1957), 119–221.
- [8] Alexandre Grothendieck, RÉCOLTES ET SEMAILLES. Gallimard, 2022.
- [9] CORRESPONDANCE GROTHENDIECK–SERRE, ed. P. Colmez, J-P. Serre, Documents Mathématiques 2, SMF, 2001.
- [10] Luc Illusie, *Grothendieck et la cohomologie étale*, L. Schneps ed. Alexandre Grothendieck: A mathematical Portrait, p. 175–192. International Press, 2014.
- [11] Luc Illusie, *From Pierre Deligne's secret garden: looking back at some of his letters*, Japan. J. Math. 10, 237–248 (2015).
- [12] Luc Illusie, *Chronology and posterity of SGA 5*, <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~luc.illusie/>
- [13] Masaki Kashiwara, *Index theorem for maximally overdetermined systems of linear differential equations*. Proc. Japan Acad. 49, 803–804 (1973).
- [14] Robert D. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*. Annals of Mathematics, 100(2): 423–432, 1974.
- [15] Michel Raynaud, *Caractéristique d'Euler–Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes*, Séminaire Bourbaki, no. 9 (1966), Exposé no. 286.
- [16] Takeshi Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*. Inventiones Math. 207(2) (2017), 597–695.
- [17] Leira Schneps, *The Grothendieck-Serre Correspondence*, L. Schneps ed. Alexandre Grothendieck: A mathematical Portrait, p. . International Press, 2014.
- [18] Jean-Pierre Serre, *Espaces fibrés algébriques*, Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. no 1, p. 1–37.
- [19] Jean-Pierre Serre, CORPS LOCAUX. Hermann, Paris, 1962.
- [20] André Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields* Bull. Amer. Math. Soc. 55(5): 497–508 (May 1949).