# 線形代数の世界

斎藤　毅

線型代数にそれ本来の座が与えられる。（N．ブルバキ「数学史」[1]）

佐武一郎「線型代数学」裳華房（一九七四）（「行列と行列式」（一九五八）改題）と齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会（一九六六）は、数学会の出版賞に輝く、名著の誉れ高い線形代数の教科書である。この二冊をはじめ、線形代数の教科書は、優れたものが、既にそして新たに数多く出版されている。このことを承知の上で、新しく線形代数の教科書を書いたいきさつなどを、ふり返ってみたい。

## えり好み

微積分と線形代数は、理系の一年生の数学の必修科目である。微積分に知名度では負けるが、線形代数の基礎であるベクトルや行列は、高校数学の目玉である。連立一次方程式や直線の方程式なら、中学生にもなじみ深いはずである。高校では、平面か三次元空間に限られるが、大学にはいると、四次元やもっと高次元の空間のベクトルも扱えるようになる。

ご存知の方も多いと思うが、数理科学研究科は駒場にあり、一年生に微積分と線形代数を教え込むのは、数理の教員のだいじな任務である。一年生の講義のうけもちは、微積分と線形代数の好きなほうを選べるようになっている。実は、線形代数のほうは、これまで一度しかやったことがない。

どうしてかと言うと、四次元空間といっても、ＳＦのような奇抜な話があるわけではない。講義のなかみは、連立一次方程式を解くことが中心で、その解き方には中学で教わったことと本質的な差はない。それに比べて微積分は、テイラー展開や偏微分、重積分といった、いかにも大学の数学という多彩な内容に満ちている。

こんな偏見をもっているので、いつも微積分を選んでいる。教師がおもしろいと思ってないものを教えるのは、学生にとって迷惑だという、都合のよい口実は誰が考えてくれたのだろう。

冬学期になると、理学部数学科にも進学の内定した二年生がやってくる。これはあまり知られてないかもしれないが、理学部数学科は、数理科学研究科と同じく駒場にある。その必修科目に、「代数と幾何」というのがあり、線形代数の続きを教え

[1] ちくま学芸文庫（二〇〇六）上　一五三ページ

ることになっている。

本を書くことになったきっかけは、おととし、この講義をもったことである。一年生の線形代数はやらないのに、二年生のをやることになったのはこんなわけである。

一年生のは、理系の学生全員の必修だから、数学が好きな学生ばかりというわけには行かない。二年生のは、理学部の他の学科に進学する学生もいるが大多数は数学科に進む学生で、数学が好きな学生がほとんどである。だから授業がやりやすい、というのは確かにあるが、ここで言いたいのはそのことではない。

一年生の線形代数では、高次元の空間をみるのがはじめてだから、高次元空間のベクトルや行列をいろいろ具体的に扱ってみてそれに慣れる、というのが主な内容になる。抽象的な線形空間も扱うことになっているが、そのあたりはどうしても学生の理解度が低くなる。その辺にこだわりすぎると、授業アンケートの評価も低くなる。ところが、線形代数がほんとにおもしろくなってきて、そのありがたみがわかってくるのは、抽象的な線形空間を扱うようになってからなのだ。

数学の歴史の中で、根本的な視点の転換が度々おきている。古くは、空間というものは一つしかないもので、その中にあるものが数学の対象と考えられていた。それが、いろいろな空間を設定して、個々の空間そのものを数学の対象と考えるようになったことは、抽象化へ向けての大きな転換だった。今でも数学を勉強していくと、この転換点を必ず通ることになる。

一年生にとっての線形代数の舞台は、座標の定められた高次元の空間という、一つしかないものである。二年生にとっては、いくつかの公理が満たされるなら、どんなものでも線形代数の対象である。関数の空間でも、数列の空間でもよい。もっと抽象的に構成される空間でもよいし、構成法すら知らない空間であってもよいのである。それに応じて、連立一次方程式を解く技術ではなく、抽象的な数学の考え方を線形代数を通して学ぶことがだいじな内容になってくる。

抽象数学の確立に中心的な役割をはたしたD．ヒルベルトによると、点や直線という名前に特別な意味はなく、ほかのどんなことばでおきかえてもよいということである。これは言いすぎだという人もいるが、数には本質的にそういうところがある。いちご三つとりんご三つをたすことに意味はないが、いちごだろうがりんごだろうが、三個たす三個が六個であることは変わらない。数学には、ヒルベルトのいうような抽象的な性格がはじめから備わっている。

## 教科書さがし

このあたりのおもしろさを教えてみたいということで、二年生冬学期の線形代数をうけもった。そこで困ったのが、教科書である。線形代数の教科書では、ふつう、三次元空間のベクトルの復習からはじめて、高次元空間のベクトルや行列にはい

る。この入り口の部分でかなりのページ数を費やしてしまうためか、抽象的な線形空間の扱いは手薄になりがちである。ところが、二年生の線形代数の主題は、抽象的な線形空間や線形写像である。キーワードをあげれば、双対(そうつい)空間や商空間である。

双対空間というのは、もとの空間と対をなす空間である。くわしい説明は本をみて頂くしかないが，強引にたとえれば、もとの空間を裏返しにしたようなものである。双対空間をもういちど裏返すこともできて、有限次元ならもとの空間とぴったり重なり、無限次元ならはみだしてしまう。商空間は、もとの空間を何かの方向につぶしたものである。

教科書を探しに、生協の書籍部に行ってみたが、商空間などの抽象的な構成までを、ていねいに説明してある本がなかなか見あたらない。名著の二冊でも、「線型代数入門」では、双対空間と商空間は演習問題で扱われているだけである。「線型代数学」では、双対空間はきちんと解説されているが、商空間については、活字も小さく、簡単な扱いである。

そこで思い出したのが、線形代数を勉強したときに読んだ、岩波講座「基礎数学」の分冊の伊原信一郎「線型空間」（一九七六）である。この本では、商空間や双対空間がしっかり解説されていた。これは、その後単行本化もされたのだが、残念なことに、今は手に入らなくなっている。

そんなわけで、おととしは「線型代数学」を参考書にして講義をした。以前は、講義の準備には、大学ノートを一冊用意して、それに講義ノートを作ったものだった。しかし、しばらくするとノートがどこかにいってしまい、何年かして同じ講義をすることになると徒労感に襲われる。そこで、数年前から、講義ノートのファイルをつくり、ホームページにおいている。

半年間の線形代数の講義と演習を終わってみると、かなりの分量の講義ノートと演習問題のファイルができあがっていた。そんなとき、出版会の委員をしている数理の先生から、それをもとに、シリーズ「大学数学の入門」に一冊書いてみたらと勧められた。このシリーズは、数学科の二、三年生の必修科目になっている現代数学の基礎的な部分について、標準的な教科書をそろえようという企画である。

抽象的な話に重点をおいた線形代数の教科書があればいいのにと思っていたのだが、それを自分で書くことになった。次の年に、というのは去年のことだが、もう一度講義をしてノートを完成し、それを本にするということで話がまとまった。

## 数学的な感覚

数学の本には、ブルバキの「数学原論」以来定着した、定義、定理、証明の羅列という確立された形式がある。ブルバキ[2]は個人名ではなく、一九三十年代に結成された、フランスの数学者集団のペンネームである。彼らの目的は、現代数学の全貌を体

[2] ブルバキについては、M・マシャル「ブルバキ－数学者たちの秘密結社」シュプリンガー（二〇〇二）に詳しく書かれている。

系的に記述する「数学原論」を書くことだった。ブルバキは、厳密な体系的記述に適したこの文体を積極的に使い、それは数学界に広く受けいれられていった。しかし、数学の論文を書くのに完璧な文体でも、入門書もそれでいいというわけにはいかない。

よく言われるように、数学が論理的な学問であることは間違いない。しかし、感覚も数学の大事な要素である。数学的な感覚をもたなければ、数学で扱う対象は、紙の上に書かれた記号でしかないだろう。しかし、その対象について昼も夜も考えていると、目の前の物体や現実のできごとに対するものと同じような、存在感が生まれてくる。日本人としてはじめてフィールズ賞を受賞した小平邦彦は、このような数学的な感覚を数覚と[3]名づけ、数学を理解するために欠かせないことを指摘した。

数学的な感覚は、言語化されない意識下の思考と関係が深そうだ。よく知っている数学的対象については、定理が成り立つかどうか、直感的にだいたいの見当がつけられる。歩き慣れた路なら、どこを通るか考えなくても目的地についてしまうことと似ている。

数学には心理的な要素も重要で、慣れてしまえば何でもないことなのに、心理的に抵抗を感じるせいで、難しいと思ってしまうこともよくある。例えば、はじめての人が何の抵抗も感じずに、関数の空間を同じように扱うことができたなら、それはむしろ不思議なことかもしれない。ものの集まりを集合とよぶと教わって、それが何の役に立つのかと思った人は多いだろう。集合や写像という概念がどう役に立つのかは、このような抽象的な対象を扱ってみないとわからない。

ブルバキの文体の欠点として、動機付けや着想の跡が抜けおちてしまうということがよく指摘される。数学的な感覚や心理的な要素を伝えるのにもむいていない。こういう点を補った本を書きたいと思ったのだが、それは意外と難しかった。感覚的にはわかっていることを、人に説明するのは難しい。意識下で何をやっているのか、本人にはわからない。感覚的にわかることは、ことばで表現するのと別の次元のことである。

今の学生にはケータイなしの生活を想像できないだろうが、携帯電話があるとどうなるのか自分が学生のころには想像もできなかった。立場は逆になるが、これと似ていることかもしれない。授業中に、簡単な話をしているつもりでも、学生の反応が今一つのことがある。質問を受けて、こちらの考えていることが通じてないことに気づかされることもある。こうして気づくことのできたふだん意識せずにやっていることは、全部本の中にとりこんだ。しかし、それが十分だったかどうかは、読者に聞いてみるしかないだろう。

## 「線形」か「線型」か

[3] 「怠け数学者の記」岩波書店（一九八六）一四六、一六三ページ

原稿ができあがって校正がはじまっても、まだ題名が決まっていなかった。東京大学出版会からは、「線型代数入門」のほかにも、既に「線形代数」という題の本が出ているので、同じ題をつけるわけにはいかなかった。本のなかみからいえば、「線形代数続論」か「高等線形代数」といったところだろうが、それではちょっと硬すぎて敬遠されそうだ。

同じシリーズの三年生むけの「代数学Ｉ」の前に読む本ということで、「代数学０」に決まりそうなこともあった。しかし、それでは意味不明といわれて、この案も没になった。いろいろ考えた末にこの題名になったが、教科書らしく見えないのではという心配もあって、副題もつけることになった。

「線形」か「線型」かという話もあった。前はみな「線型」と書いていたのが、いつの間にか「線形」が標準になった。私も旧世代に属することになったようで、「線形」と書くのには抵抗があった。編集の方に、「線型」では古めかしい感じがして売れませんといわれてしまったので、「線形」に転向した。

「線形」にすることに決めて、去年の講義をした。黒板に「線形」と何度も書いていると、「線型」よりほんのわずかだが早く書けることに気がついた。それで、最近は完全に「線形」派になった。そうなると、「同型」も「同形」と書きたくなった。日本数学会編集の「数学辞典」第三版を調べてみると、もう「同形」派になっている。ならば「同形」が標準なのかと思ったら、今年出た第四版では、「同型」に戻った。どうなっているのかわからない。

## 線形代数の時代

線形代数が、微積分とならんで数学を支える柱として、明確に認識されたのは、そうむかしのことではない。もちろん、連立一次方程式の解法は、古くからよく知られた基本的な技術である。しかし、それ自体をとりあげて、数学の基礎として位置づけるということはなかった。これを一変させたのが、ブルバキ「数学原論」の代数の第二章「線型代数」（一九四七）（和訳東京図書（一九七〇））である。

「数学原論」は二十世紀の数学に大きな影響を残したが、数学教育に与えた影響も大きかった。集合が小学校で教えられたのはその一つである。線形代数が大学での講義の定番となったのもそうである。教科書の名著二冊も、当時のそういう変化をうけて書かれたものに違いない。

ブルバキの「線型代数」が書かれてから半世紀のあいだに、数学の基本としての線形代数の地位は、揺るぎないものとなった。大学で、一、二年生は線形代数を勉強するという時代は、まだまだ続きそうである。今年も冬学期がはじまり、数学科にも新しい学生たちがやって来る。彼らにとって、新しい教科書が、抽象数学の世界へのよい道案内となることを祈る。

（「ＵＰ」十二月号掲載予定）